力学における
テンソルと変分解析
[上]

多 谷 虎 男 著

学会出版センター

序　　文

本書は大学工学部高学年及び大学院生並びに力学研究者を対象として，力学の中で最も難解であるが，きわめて重要な位置を占める表題の事柄について，徹底的な理解を図ることを目的としたものである．

目次を見ていただけば，内容についての大体の見当はつくと思うが，内容はかなり数学的なところがある．実用を目的とする工学者にとって，この分野における純粋数学書は，抽象的過ぎるきらいがあり，一方，在来の力学解説書はあまりにも，粗野に過ぎて，力学の根底をなす原理の理解及び数学的解析には甚だ不十分であったように思われる．本書はこのような観点から，表題の事柄について，具体的ではあるが，徹底的な理解を得ることを目的として書かれたものである．

著者が大学の工学部学生であった頃の応用力学書(ただし応用弾性学を除く)の花形は，三連モーメントまたは四連モーメントの定理，ラーメンの撓角法や，モーメント分配法などの不静定骨組構造物の解析に関するものが，その主なものであった．これらはいずれも平衡条件式と梁の弾性撓み式を基礎として，不静定構造物について多元連立一次方程式を樹立し，これを解くことに帰するが，数学的には，つづまるところ，この多元連立方程式をどのようにして，実用的に解くかという数値解析法であって，いわゆる，elementary theory の域を出ないものである．このような状態は，少なくとも我国の現業界では，今日もほとんど変っていないように思われる．ただ電子計算機の導入によって，有限要素法が使用されるようになったことだけが，変った点として挙げられるだけである．

先年，著者が，西欧の大学を回った際には，大学院で，テンソル解析，変分解析を講じている所を少なからず見かけた．それに引きかえ，我国大学の現状を見るに，テンソル解析，変分解析の研修はほとんどなされておらず，これについての工学的解説書も皆無に等しい状況にある．

いうまでもなく，力学の根底をなすものは，物理的原理，法則及びその数学的解析理論であるが，その代表的なものは，テンソル解析であり，変分解析である．したがってその完全な理解なくして力学関係の論文を書いても，あまり価値ある論文とはなりえないだろう．この意味では，フーリェー変換，ラプラス変換，ヘンケル変換等の微分方程式の解法に関する数学解析理論も力学にと

って重要であるが，これらは，すでに樹立された微分方程式をいかにして解くかということについて，それを必要とするのである．一方，テンソル解析，変分解析は，さらに根底的であって，力学的物理現象そのものを理解して，数学的に飜訳し，これを微分方程式として，数式の俎上にのせるために，是非ともそれを必要とするのである．

従来の我国の論文を見るに，曲線橋などの曲った構造物の力学解析に，デカルト座標系を用いて論じている例が多いが，このような場合，仔細に検討すれば，空間の曲りなどによって生ずる幾何学的な問題の思考において，思いもよらぬ思考錯誤がある場合が多い．欧米の書物でも，テンソル解析によらない shell 解析の書物の中には，解析結果が間違っているにもかかわらず，それが堂堂と罷り通っている例があるが，このことほど左様に，曲った空間は通常のデカルト座標系では難解であり，思考錯誤が多いものである．この点，テンソル解析は，曲った空間を曲ったなりに考えるので，shell 解析などではテンソル解析の独断場であるといっても過言ではない．

エネルギー変分原理は，数学的解析の取扱い上からは，別にむずかしいものではないが，その根底をなす物理的思考の上では，なかなか正確に理解されにくいものである．ここでは実名を避けるが，在来刊行されている著名な書物でさえ（邦書だけでなく洋書にも）間違った解説がなされている例がある．たとえば，Hamilton の原理の解説において，或る書物では，運動のエネルギー，歪エネルギー，位置のエネルギー，摩擦熱損失，及び外力仕事をそれぞれ，T, U, V, H, W とすれば，現実に生起する現象は，$\int_{t_0}^{t_1}(T-U-V-H+W)\,dt=$（極小）なる場合の関数であると書かれている．これは，この積分の値の符号を変えたものが極小となることの間違いであり，この場合にはいずれにしても停留値を与えるということに変りはないから，解析結果には影響しないが，物理現象の正確な理解がなされていない証左である．また他の或る書物では，$H=W=0$ なる場合について書かれ，$\int_{t_0}^{t_1}(T+U+V)\,dt=$（極小）なる場合の関数であると書かれているが，この場合には，結果的にも完全に間違った結果が得られてしまう．このように，エネルギー変分原理は，多くの力学書で取扱われているが，必ずしも正しい解説がなされていない．

さらに，従来の応用力学書では，Castigliano の定理，最小ポテンシャル・エネルギーの定理，最小補足エネルギーの定理を混同して，その間の確たる説明を施していないばかりか，これらの解説を行うのに，単に一つの外力が一点に作用して，その外力と同一方向に変位を生じた場合のみを対象として解説し，一般の場合については何の解説も加えていないものがほとんどである．このようなことでは，力学の根底としての物理的原理の理解について，確固たる信念

が得られないのは当然であって，応用の際に間違った使い方がなされるのもまた，やむをえないことといわねばならぬ．

また，エネルギー解析法は，純力学的解析法に比べて，多少哲学的ともいえるところがあって，明確な理解がなされていないために，或る人々はこの方法を，純力学的解法の代用としての概算的方法であると考え違いをしていることがしばしばある．しかし，左様なことは断じてなく，エネルギー計算に用いる式が概算的近似式ならば，それに応じて，概算結果が出るだけであって，それは純力学的解析の場合でも全く同じである．

以上，要するに，エネルギー変分原理は，力学解析上，その根底としてきわめて重要で，近年，人口に膾炙されている有限要素法も，その本質は，エネルギー変分原理にあるといってもよく，sharp tool を提供するものであるが，反面，きわめてデリケートで，誤解，誤用されやすいものであるので，本書では徹底的な理解が得られるように意を注いだつもりである．

本書の内容の配列については著者は少なからず迷った．テンソル解析とマトリックス解析とを比べれば，数学的には，後者のマトリックス解析は問題なく，テンソル解析の序ノ口ともいえるもので，順序として，テンソル解析の前にくるべきものである．有限要素法は数学的な取扱い上ではマトリックス解析がその主体であるから，上記のような意味では，テンソル解析よりも前にくるべきものであるが，その物理的本質はエネルギー変分原理である．このエネルギー変分原理は，振動論などの動力学に関連することが多いので，力学解析の上からは，静力学的部分を主体とするテンソル解析の後にくるのが順序である．そこで結局，本書ではテンソル解析を第１編とし，変分解析を第２編とすることにしたが，弾性特殊問題，shell 理論，弾性座屈のテンソル解析などは，変分解析よりも数学的にははるかにむずかしいといえるかもしれない．

本書は，実用的解析結果の羅列よりも，本質の徹底的理解を得ることに主眼を置いたために，意外に頁数が嵩む結果になったので，テンソル解析の基礎的部分を上巻とし，テンソル解析の advanced course 及び変分解析部分を下巻として，二分することにした．内容の点では，著者独自の解析結果も多数含めてあるので，適正でない点があれば，読者諸氏のご叱正を仰ぎたい．

東北大学停年退官を期に，本書の刊行を思い立ってから，約３年を経て，今回ようやく上梓の運びとなったことは，著者の深く喜びとするところであるが，この間，お力添えくださった方々に厚く御礼申し上げる．

(1979．10　　著者記)

上 巻 目 次

第1編　力学におけるテンソル解析

第1.1章　ベクトルとテンソル

第1.2章　テンソルと線形変換

第1.9章 曲線座標系

第1.10章 連続体の力学における基礎方程式

下 巻 目 次

第2編　力学における変分解析

第2.2章　エネルギー諸原理

第2.3章　有限要素法

力学におけるテンソルと変分解析

［上］

第1編

力学におけるテンソル解析

第1.1章　ベクトルとテンソル

1.1.1　テンソルの概念，テンソルの階数と次数

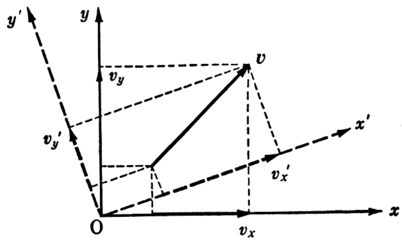
テンソルの数学的な定義については，別に節を設けて述べることとし，ここではテンソルの概念と，その数学的な定義の前提となるいくつかの項目について述べることにする．

テンソルの最も身近な例は，外力を受ける物体内部に生ずる応力と歪である．これらの量は，三次元空間内にあるベクトルと同様に，三次元空間中に設定した座標系のいかんによって，その成分表示形に相違を生ずるが，或る点に固着したベクトルそのものが，座標系によって変らないのと同様に，或る点における応力または歪そのものは，座標系のいかんにかかわらず一定な物理量として，われわれの脳裡に思惟しうるものである．このようなものをテンソルというのであるが，これではあまりにも漠然としているので，もう少し詳しく述べる必要がある（第 1,2 図参照）．

上述の事柄は，理解を容易にするために，三次元空間を例にとって述べたのであるが，ここで説明の順序として，テンソルの説明上，欠くことのできない空間ということについて一言触れておかなければならない．

空間の分類については，観点の相違によって，いろいろな分類があるが，テンソルの説明に必要な分類として，**可測的幾何学空間 (metric space)** と**類似空間** (**affine space**) とに分ける分類について述べることにしよう．可測的幾何学空間の最もわかりやすい実例は，われわれが住んでいる現実の三次元空間であるが，数学的には何も三次元空間に限ったものではなく，一般に幾何学的方向性をもつ n 次元の独立な量を，座標軸にとって可測的な空間を考えるとき，そのなかでこれらの座標軸を回転しても，この空間内で思惟している或る一定の実在量（entity）についての意義が失われない空間を metric space という．これに対してたとえば，温度，時間，金額など，幾何学的方向性をもたないスカラー（scalar）に，無理に或る方向性を与えてこれらを座標軸にとった空間では，座標軸を回転すると，各座標成分はその意義を失い，したがってこのような空間内では，座標系のいかんにかかわらず一定な実在量を思惟することができない．かような空間を affine space というのである．

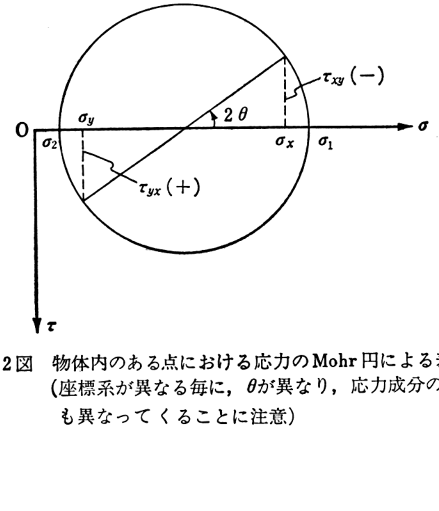
一般に，テンソル量というのは，上述の可測的幾何学空間のなかで，思惟しうる或る一定の物理的実在量の総称である．このようなテンソル族（tensor



第1図　ベクトルvの座標系による成分表示形の相違

family)には，**階数**（**order**）と**次数**（**degree**）とがある．まず階数について述べよう．前述の応力や歪は，二階のテンソルの典型的な例であるが，通常単にテンソルとよんでいるのは，この二階のテンソルのことである．実は scalar も vector も，テンソル族のなかの量であって，それぞれ零階及び一階のテンソルなのである．零階のテンソルすなわちスカラーは，座標系の変換によって何も変らないものをいい，また一階のテンソルすなわちベクトルはその成分を1行または1列に並べて書き表しうるものをいい《このようなベクトルの表示を，それぞれ行ベクトル（row vector）または列ベクトル（column vector）とよんでいる》，さらに二階のテンソルは，その成分を，同数の行と列との両方に並べて，正方マトリックスの形に表しうるものをいうのである．二階のテンソルと，単なる正方マトリックスとの相違は，それが可測的幾何学空間内の実在量として考えられるか，否か，ということによるのである．このことを換言すれば，応力テンソルの実例からも容易にわかるように，**幾何学的方向性を有する行ベクトルが，さらに列の方向でも，幾何学的方向性のあるベクトル的性格をもって，並べられている**ことを意味しているのである．三階以上のテンソルについても，それがどのようなものを意味しているか，読者は，二階のテンソルから類推できることと思う．

次にテンソルの次数について述べる．テンソルの次数というのは，一つの行



第2図　物体内のある点における応力のMohr円による表示
（座標系が異なる毎に，θが異なり，応力成分の表示形 $\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & \sigma_y\end{bmatrix}$ も異なってくることに注意）

または一つの列に並べられるテンソル成分の個数のことである．すなわち二次元空間では次数は2であり，また三次元空間では次数は3であり，さらに一般に，n 次元空間では，次数は n である．

前述のように，テンソル量は，可測的幾何学空間内で思惟しうる一定の実在物理量の総称であるから，後で述べるように，**一定の座標系変換マトリックス $[\beta_i^{j'}]$ の法則に従って，一つの座標系から他の座標系に，その成分表示が変換される量**であるが，成分表示は変換されても，それは単に成分表示の変換であって，われわれが思惟している実在の物理量そのもの自体は同一のもので，少しも変ってはいないことに注意しなければならぬ．また，**テンソル量の成分表示は，同一の座標系成分で表示され**，後述の座標系変換マトリックス $[\beta_i^{j'}]$ のように，個々の要素が**二つの座標系にまたがって表示されるようなことはありえない**ことも当然のことである．

以上ではテンソル量と，単なるテンソルの意味を明確には区別しなかったが，それはベクトル量と，単なるベクトルの区別と同様に，対象として必ずしも物理量を考えず，単にその数学的性質のみを保有する抽象物を対象として考えるときはこれを単に，テンソルとよぶ．応力テンソル

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

は上述のように，二階のテンソルであるが，面積ベクトル $\boldsymbol{A}=\{A_x \ A_y \ A_z\}$（面積ベクトルは，その面に垂直な方向と，面積の大きさの絶対値とを有するベクトルとして表わす）に，上の応力テンソルを乗ずる（ただし dot product をする．このことについては後で述べる）と，次のように，力のベクトル $\boldsymbol{F}=\{F_x \ F_y \ F_z\}$ を得る．すなわち，

$$\{A_x \ A_y \ A_z\}\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}=\{F_x \ F_y \ F_z\}$$

このように，二階のテンソルは，一定の可測的幾何学空間中の同一座標系内で，或るベクトルを変換（線形変換）して，他のベクトルに変える性質をもっている．上の例では，応力テンソルが物理量であったが，このような物理量でなくても，**同一座標系内で，或るベクトルを変換して，他のベクトルに変える抽象的な線形変換を，二階のテンソル**と定義している書物もある．ただしこの場合，或るスカラーを変換して，他のスカラーに変えるものはもちろん，二階のテンソルとはいえない．この場合，変換されるものも，変換の結果得られるものも，いずれも可測的幾何学空間内で，幾何学的方向性をもったベクトルでな

ければならない．一般に n 階のテンソルは，それにベクトルを dot product するとき，一階だけ低いテンソルを生ずる．したがってベクトルとの dot product の結果，得られるものが，たしかに一階だけ低いテンソルであることが証明されれば，元の n 階のものはたしかに，n 階のテンソルであるといってよいだろうが，このような上述の定義はあまり感心したものではない．

1.1.2　ベクトル成分の Dot product (Scalar product)

直交直線座標系（これを以後，デカルト座標系とよぶことにする）の各座標軸 x, y, z 上に，それぞれ単位長さのベクトル，$\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z$《これらを単位ベクトル (unit vector) とよぶ》をとり，これらの単位ベクトルで作られる一様な網目または枠組の個々のものを，基底枠 (reference frame) とよぶ．力のベクトル $\boldsymbol{P}$ は，この基底枠を用いて次のように表すことができる．すなわち，

$$\boldsymbol{P}=p_x\boldsymbol{i}_x+p_y\boldsymbol{i}_y+p_z\boldsymbol{i}_z=\{p_x\ \ p_y\ \ p_z\}$$

また，一方，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ も，上記の基底枠を用いて，

$$\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{i}_x+u_y\boldsymbol{i}_y+u_z\boldsymbol{i}_z=\begin{Bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{Bmatrix}$$

のように表される．

変位 $\boldsymbol{u}$ が行われる間に，力 $\boldsymbol{P}$ によってなされる仕事量 W は，$\boldsymbol{P}$ 及び $\boldsymbol{u}$ の絶対値をそれぞれ P, u で表し，ベクトル $\boldsymbol{P}$ と，ベクトル $\boldsymbol{u}$ の，2方向間の角度を β とすれば，

$$W=P\cdot u\cdot\cos\beta$$

である．上式の演算を通常，二つのベクトルの**スカラー積 (scalar product)** といい，**dot product** として，次のように書き表すことができる．

$$\begin{aligned}W&=P\cdot u\cdot\cos\beta=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{P}\\&=(p_x\boldsymbol{i}_x+p_y\boldsymbol{i}_y+p_z\boldsymbol{i}_z)(u_x\boldsymbol{i}_x+u_y\boldsymbol{i}_y+u_z\boldsymbol{i}_z)\\&=\{p_x\ \ p_y\ \ p_z\}\begin{Bmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{Bmatrix}=p_xu_x+p_yu_y+p_zu_z\end{aligned}$$

デカルト座標系では，よく知られているように，

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}_x\cdot\boldsymbol{i}_x=\boldsymbol{i}_y\cdot\boldsymbol{i}_y=\boldsymbol{i}_z\cdot\boldsymbol{i}_z=1\\\boldsymbol{i}_x\cdot\boldsymbol{i}_y=\boldsymbol{i}_y\cdot\boldsymbol{i}_z=\boldsymbol{i}_z\cdot\boldsymbol{i}_x=0\end{aligned}\right\}$$

なる関係が成立するが，この関係式は，**クロネッカーのデルタ (Kronecker's delta)** 記号，δ_{mn} を

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1 & (m=n)\\0 & (m\neq n)\end{cases}\qquad(1.1.1)$$

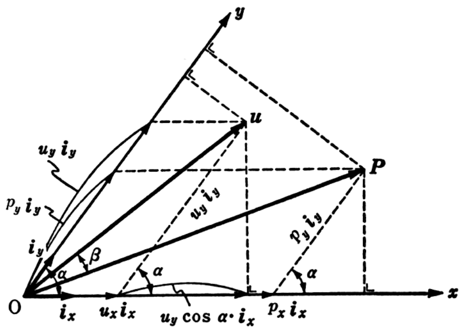
と定義するならば，上記の関係は簡潔に次のように表すことができる.

$$\boldsymbol{i}_m \cdot \boldsymbol{i}_n = \delta_{mn} \qquad (\text{ただし，} m, n = x, y, z)$$

デカルト座標系では，上記のような性質があるから，二つのベクトルのスカラー積は，各ベクトルの成分同士の dot product の和として書き表すことができたが，このような演算操作が，一般の斜交曲線座標系でも，常に可能であるとはかぎらない.

今，デカルト座標系で，二つのベクトルのスカラー積が，各ベクトルの成分同士の dot product の和として書き表すことができたのと，全く同様な形の演算操作が，一般の曲線座標系でも可能になるような方法がないものかどうか，以下に考えてみることにしよう.

簡単のために二次元斜交軸座標系（第３図）の場合を例にとって考えてみることにする．力のベクトル $\boldsymbol{P}$ が，変位 $\boldsymbol{u}$ の間になす仕事量 W は，



第３図　斜交軸座標系におけるベクトルの Dot product

$$W = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u} = p_x u_x + p_y u_y + p_x u_y \cos\alpha + p_y u_x \cos\alpha$$
$$= p_x (u_x + u_y \cos\alpha) + p_y (u_y + u_x \cos\alpha)$$

であるが，この仕事量 W はまた，

$$W = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{P} = u_x (p_x + p_y \cos\alpha) + u_y (p_y + p_x \cos\alpha)$$

と表すこともできる.

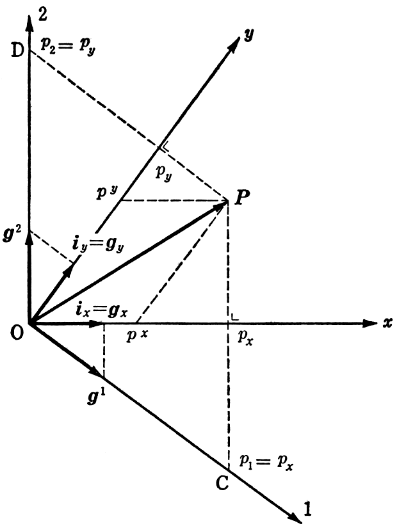
したがって，二つのベクトル $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{u}$ のいずれか一方のベクトルを斜交座標系の網目に従った通常の成分に分解し《この成分を**反変成分**（**contravariant components**）といい，文字の上に上付添字 x, y をつけて表す》，他方のベクトルを斜交座標軸に垂線を下して得られる成分《この成分を**共変成分**（**covariant components**）といって，文字の下に下付添字 x, y をつけて表す》に，分解して表すことにすれば，仕事量 W は次のように表される.

$$W = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{u} = p^x u_x + p^y u_y = u^x p_x + u^y p_y$$
$$= \{p^x \;\; p^y\} \cdot \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \{p_x \;\; p_y\} \cdot \begin{Bmatrix} u^x \\ u^y \end{Bmatrix}$$

すなわちデカルト座標系の場合と同様に演算できることがわかる.

しかしながら，斜交座標軸に垂線を下して得られるベクトル成分は，ベクト

ルの平行四辺形による分解法則を踏みはずしているので，平行四辺形による分解法則を踏みはずすことなく，しかも同時に上述のような演算操作を可能にするためにはさらに工夫を重ねることが必要である．それには第4図に示すように，ベクトル$\boldsymbol{P}$を，平行四辺形の法則に従って1軸および2軸上で《(1軸)⊥(y軸)，(2軸)⊥(x軸)とする》$\overline{\mathrm{OC}}=p_1\boldsymbol{g}^1$，$\overline{\mathrm{OD}}=p_2\boldsymbol{g}^2$に分解し，元の$x, y$軸上の成分の長さ，$p_x, p_y$を1軸または2軸上でそれぞれ拡大した成分長，$\overline{\mathrm{OC}}, \overline{\mathrm{OD}}$としてとる代りに，元の unit vector　$\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y$をそれぞれ1軸，2軸上で，同様に拡大した基底ベクトル$\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2$ (unit vector と区別することに注意) を基準として，新しい成分長$\overline{\mathrm{OC}}, \overline{\mathrm{OD}}$を測定するようにすれば，この測定によって得られる成分長，$\overline{\mathrm{OC}}, \overline{\mathrm{OD}}$の数値$p_1, p_2$は明らかに



第4図　ベクトルの共変成分と反変成分，及び反変基底ベクトルと共変基底ベクトル

$$p_1 = p_x, \qquad p_2 = p_y$$

なる関係にあるから，このようなベクトルの分解は，平行四辺形の分解法則を満足すると同時に，上述の演算操作を可能にするものであることがわかる．このような演算操作を一般に **dot product** (**または scalar product**)とよぶ．今後は$p_1 = p_x$, $\boldsymbol{g}^1 = \boldsymbol{g}^x$, $p_2 = p_y$, $\boldsymbol{g}^2 = \boldsymbol{g}^y$と書き表すこととし，$\boldsymbol{g}^x, \boldsymbol{g}^y$ **を反変基底ベクトル**とよぶ．$\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y$は今の場合 unit vector であるが，$\boldsymbol{i}_x = \boldsymbol{g}_x$, $\boldsymbol{i}_y = \boldsymbol{g}_y$のように書き表した場合には，これを**共変基底ベクトル**とよぶ．共変基底ベクトル$\boldsymbol{g}_x, \boldsymbol{g}_y$はそれぞれ反変成分$p^x, p^y$の基準長となるものであって，必ずしも今の場合のように，単位ベクトルであるとはかぎらない．

1.1.3　Indicial notation 及び Summation convention

前節で示したように，ベクトルはマトリックスの形式で表されるだけでなくその文字の右肩または右下に上付添字または下付添字を付して簡単に表示することができる．このことはベクトル(一階のテンソル)だけにかぎったことでは

なく，一般に二階以上のテンソルについても，二つ以上の上付添字または下付添字を付して表示することが可能である．このような表示法を，一般に **indicial notation** による表示とよんでいる．この方式によれば，マトリックス表示の場合のように文字（ただし，添字の意味ではない）の配列の順序，たとえば転置などは別に問題にする必要がない．それは添字ですべて示されているからである．

また，前節で示したように，二つのベクトル $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{u}$ の dot product は，

$$W=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}=p_x u^x+p_y u^y+p_z u^z=p^x u_x+p^y u_y+p^z u_z=\sum^n p_n u^n=\sum^n p^n u_n$$

ただし，
$$n=x,\,y,\,z$$

であるが，これを簡潔に表示する方法として $\sum$ なる記号を省略して，

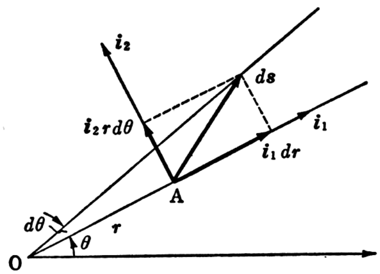
$$W=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}=p_n u^n=p^n u_n$$

と書き表すこととし，同じ添字が上付と下付とで繰返す場合には，常にその添字がとりうるあらゆる場合についての総和を示すものと約束する．このことを，**summation convention** または **Einstein's convention** という．（ただし，同じ添字が上付ばかりで繰返す場合や，または下付ばかりで繰返す場合は，総和を意味しないものとする．さらにまた，同じ添字が上付と下付とで繰返す場合であっても，その添字が特定の指標を指定しているときは，総和を意味しないものとする．）dot product で，同一の添字が一つは上付として，他方の一つは下付として繰返し，その結果，その添字がとりうるあらゆる場合についての総和を示す場合には，添字で示された方向性は消滅してしまう．換言すれば，dot product で summation convention となる添字は，dot product の結果，その添字を必要としない（幾何学的方向性をもたない）量，すなわちスカラーとなってしまう（上の例では W なるスカラー量となる）．このように，dot product の結果，消滅する上付及び下付の添字のことを **dummy index** とよび，そうでなく，dot product の結果においても生き残る添字のことを **free index または active index** とよんでいる．また dummy index によって，その添字が消滅して，表示が簡単になる演算操作を**縮約**（**contraction**）とよんでいる．縮約は常に上付及び下付の二つの index を吸収消滅させるから，この操作は，一般にテンソルの階数を二つだけ低下させることになる．しかし一般にテンソルの等式が，その意義を有するためには，いずれの項も同一階数でかつ同一文字の free indices をもつものでなければならないことはもちろんである．

1.1.4 基底ベクトルと Metric tensor

1.1.2 節で反変成分 p^x を定義する基底（base）としては，unit vector $\boldsymbol{i}_x$

を用いたが，共変成分 p_x に対する基底（base）としては，単位の長さでないベクトル $\boldsymbol{g}^x$ を用いることが必要なことを述べた．今このことを第5図に示すような，極座標の場合に拡張してみよう．



第5図　極座標における基底ベクトル(Base vector)

まず標本のベクトルとして，線分素 $d\boldsymbol{s}$ を選び，座標の増大する方向に unit vector $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2$ をとるものとすれば，

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{i}_1 dr+\boldsymbol{i}_2 r d\theta$$

である．したがって $dr=dx^1$，$d\theta=dx^2$ とおけば，$d\boldsymbol{s}$ は，

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{i}_1 dx^1+\boldsymbol{i}_2 r dx^2$$

のように表される．ここで，$\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{i}_2 r=\boldsymbol{g}_2$ と書くことにすれば，$d\boldsymbol{s}$ は結局次のように表される．

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_1 dx^1+\boldsymbol{g}_2 dx^2=\boldsymbol{g}_i dx^i$$

今の場合 $\boldsymbol{g}_1$ は，なお unit vector に等しいが，$\boldsymbol{g}_2$ はもはや単位長ではなく r の絶対値をもち，点 A の座標が異なるごとに変化して一定ではない．また $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ の方向も θ の値によって変化する（デカルト座標系では，base vector がどこでも一様であるから，任意の点のベクトルを，原点の位置に平行移動してその成分を考えてもよいが，曲線座標系では，場所によって，base vector が異なるので，それぞれのベクトルは，そのベクトルの存在する位置で，base vector 方向の成分に分解して考えることが必要である）．

上述の事柄を任意の三次元座標系（一般に曲線座標系）$x^i (i=1,2,3)$ に拡張して任意の線分素ベクトル $d\boldsymbol{s}$ が，

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_i dx^i \tag{1.1.2}$$

なる式で表されるように，三つの基底ベクトル $\boldsymbol{g}_i$ を選ぶものとする．この場合，$\boldsymbol{g}_i$ を，前にも述べたように，一般に**共変基底ベクトル**（**covariant base vector**）とよぶ．今，座標原点Oから，点Aに向かって引かれた位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を考えることにすれば，線分素ベクトル $d\boldsymbol{s}$ は，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の末端点が，A点からその隣接点に移動する場合のベクトル $\boldsymbol{r}$ の増分，$d\boldsymbol{r}$ であるということができる．ゆえに，

$$d\boldsymbol{s}=d\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}dx^i \qquad \text{(summation convention)}$$

のように書き表すことができる．上式を (1.1.2) 式と比較すれば次のことがわ

かる．すなわち，

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{1.1.3}$$

次に反変基底ベクトル $\boldsymbol{g}^i$ を Kronecker's delta を用いて，次式のように定義する．すなわち，

$$\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=\delta^i_j \tag{1.1.4}$$

（ただし，δ^i_j は Kronecker のデルタとする）

すなわち，$\boldsymbol{g}^i$ は $i\neq j$ なる場合には常に $\boldsymbol{g}_j$ と直交する性質を有し，また，$i=j$ なる場合には，

$$|\boldsymbol{g}_i|\cdot|\boldsymbol{g}^i|\cdot\cos\beta=1$$

（ただし，β は $\boldsymbol{g}_i$ と $\boldsymbol{g}^i$ とのなす角とする）

なる性質を有する．反変基底ベクトル $\boldsymbol{g}^i$ の定義は上述のようであるが，この定義を用いてベクトル $\boldsymbol{P}$ の共変成分 p_j を一般に次のように定義することができる．

$$\boldsymbol{P}=p_j\boldsymbol{g}^j \tag{1.1.5}$$

そうすると，反変基底ベクトル $\boldsymbol{g}^i$ の定義はまた，

$$\boldsymbol{g}^i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_i} \tag{1.1.6}$$

とも一致する．

式 (1.1.2)〜(1.1.5) の定義を，二つのベクトル $\boldsymbol{u}$ 及び $\boldsymbol{v}$ に適用すれば，それらの dot product は一般に次のように書き表されることがわかる．

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u^i\boldsymbol{g}_i\cdot v_j\boldsymbol{g}^j=u^iv_j\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=u^iv_j\delta^j_i=u^iv_i\\ \text{または，}\quad&\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_i\boldsymbol{g}^i\cdot v^j\boldsymbol{g}_j=u_iv^j\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=u_iv^j\delta^i_j=u_iv^i\end{aligned}\right\} \tag{1.1.7}$$

（ただし，$a^ib_j\neq a_ib^j\neq a_jb^i$ なることに注意）

共変基底ベクトル $\boldsymbol{g}_1$ を反変成分で書き表せば，

$$\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}_1\cdot1+\boldsymbol{g}_2\cdot0+\boldsymbol{g}_3\cdot0$$

となって (1,0,0) の成分となることは当然のことであるが，もしも $\boldsymbol{g}_i$ を反変基底ベクトルと共変成分との積和として分解すれば，一般に，

$$\boldsymbol{g}_i=g_{ij}\boldsymbol{g}^j \qquad (j=1,2,3) \tag{1.1.8}$$

のように，三つの共変成分 g_{ij} (i=固定，$j=1,2,3$) を得る．

今，i=固定，$j=1,2,3$ の場合だけでなく，i も1,2,3 の三様に変化する場合を考え，g_{ij} で表示される九つの因子全体で定義される量を想定すると，このようにして定義される量はたしかにテンソルである．このテンソルを一般に **metric tensor** とよび，個々の g_{ij} をその共変成分とよぶ．

同様な考え方を反変基底ベクトル $\boldsymbol{g}^i$ について実施すれば，

$$\boldsymbol{g}^i=g^{ij}\boldsymbol{g}_j \tag{1.1.9}$$

となり，$\boldsymbol{g}^i$ を反変成分 g^{ij} に分解することができる．すなわち metric tensor の反変成分は，上の（1.1.9）式によって定義される．

さて，同一種類の二つの基底ベクトルの dot product を考えてみよう．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_j=g_{ik}\cdot\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}_j=g_{ik}\cdot\delta^k_j=g_{ij}\\ \boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j=g^{ik}\cdot\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}^j=g^{ik}\cdot\delta^j_k=g^{ij}\end{aligned}\right\}\qquad(1.1.10)$$

上式で dot product 中の二つの base vector はその順序を交換してもよいから，次式が得られる．

$$g_{ij}=g_{ji},\qquad g^{ij}=g^{ji}\qquad(1.1.11)$$

（1.1.10）式はまた，g_{ij} 及び g^{ij} の定義としても使用することができる．もしこのような定義をすれば，（1.1.8）式はこの定義から誘導せられなければならない．今仮に，

$$\boldsymbol{g}_i=a_{ij}\boldsymbol{g}^j$$

とし，この両辺に $\boldsymbol{g}_k$ を dot product すれば，

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_k=a_{ij}\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_k=a_{ij}\delta^j_k=a_{ik}$$

を得る．上式と（1.1.10）式とを比較すれば $a_{ik}=g_{ik}$ であることがわかる．すなわち，（1.1.8）式は（1.1.10）式の定義から誘導されることがわかる．

次に共変基底ベクトル $\boldsymbol{g}_i$ と反変基底ベクトル $\boldsymbol{g}^i$ との dot product を考えてみると，

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j(=g^j_i)=\delta^j_i$$

また，

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=g_{ik}\boldsymbol{g}^k\cdot g^{jl}\boldsymbol{g}_l=g_{ik}g^{jl}\delta^k_l=g_{ik}g^{jk}$$

$$\therefore\quad g_{ik}g^{jk}=\delta^j_i\qquad(1.1.12)$$

この関係式は $[g_{ij}]$ と $[g^{jk}]$ とがちょうど，逆行列の関係にあることを示すものである《ただし，個々の成分については，$g_{ij}\neq 1/g^{ij}$ であり，また，

$$g^{12}g_{12}=(\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}^2)\cdot(\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}_2)\neq\begin{cases}(\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2)\cdot(\boldsymbol{g}_1\cdot\boldsymbol{g}^2)=0\\ (\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1)\cdot(\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_2)=1\end{cases}$$

であることに注意することが必要である》．

（1.1.12）式は j の値を固定し，$i=1,2,3$ とするとき，次の三つの式を与えることになる．すなわち，

$$\left.\begin{aligned}g_{11}g^{j1}+g_{12}g^{j2}+g_{13}g^{j3}=\delta^j_1\\ g_{21}g^{j1}+g_{22}g^{j2}+g_{23}g^{j3}=\delta^j_2\\ g_{31}g^{j1}+g_{32}g^{j2}+g_{33}g^{j3}=\delta^j_3\end{aligned}\right\}$$

上式において，g_{ik} がすべて既知ならば，これらの式を g^{jk} に関する連立方程式として解くことによって g^{jk} の値を求めることができる．逆に（1.1.12）式はまた，g^{jk} を既知として g_{ik} を求めることにも使用することができる．

さらに，g_{ij} の性質として，次のことがいえる．

$$d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_i dx^i\cdot\boldsymbol{g}_j dx^j=g_{ij}dx^i dx^j \tag{1.1.13}$$

上式の左辺は，線分素の 2 乗を示している．

g_{ij}, g^{ij} はベクトルの反変成分を共変成分で表したり，また逆に，共変成分を反変成分で表したりするのに使用される．すなわち，

$$\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{g}_i=u^i g_{ij}\boldsymbol{g}^j$$

また，一方，

$$\boldsymbol{u}=u_j\boldsymbol{g}^j$$

$$\therefore\quad u^i g_{ij}\boldsymbol{g}^j=u_j\boldsymbol{g}^j$$

ここで上式の両辺には，見掛け上，$\boldsymbol{g}^j$ なる因数があるけれども，上式の両辺は，単なる積を示すものではなく，それぞれ$\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{g}^3$ なる三つの項から成る三つの積和を示すものであるから，簡単に $\boldsymbol{g}^j$ なる両辺の因数を約してよいかどうかは必ずしも明らかではない．そこで因数 $\boldsymbol{g}^j$ を除くために，次の手続きをとることにする．すなわち，両辺に $\boldsymbol{g}_k$ を dot product すれば，

$$\left.\begin{aligned}u^i g_{ij}\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_k&=u^i g_{ij}\delta^j_k=u^i g_{ik}\\ u_j\boldsymbol{g}^j\cdot\boldsymbol{g}_k&=u_j\delta^j_k=u_k\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad u^i g_{ik}=u_k \tag{1.1.14 a}$$

同様にして，

$$u_i g^{ik}=u^k \tag{1.1.14 b}$$

上の (1.1.14) 式で示される操作は，同一座標系内で，ベクトル成分の指標 (index)を，上げ下げする操作法として，非常によく使われる手法である．

(1.1.14)式を利用して，ベクトルの dot product について，さらに次の二つの形式が得られる．すなわち，

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_i v^i=u_i v_j g^{ij}=u^j v^i g_{ij} \tag{1.1.15 a}$$

$$=u^i v_i=u_j v_i g^{ij}=u^i v^j g_{ij} \tag{1.1.15 b}$$

(ただし，　$u_i v_j \neq u^i v^j$,　　$u^i v^j \neq u^j v^i$)

1.1.5 座標系の変換(Coordinate transformation)

同一の可測的幾何学空間内に，新，旧，二つの座標系を考え，旧座標系の base vector を $\boldsymbol{g}_i$, 新座標系のbase vector を $\boldsymbol{g}_{i'}$ で表すことにする($i=1,2,3$; $i'=1',2',3'$とする)．旧座標系で或るベクトルの成分 v^i が既知である場合，新座標系でのそのベクトルの成分は，どのようなものになるかについて考えてみよう．

二つの座標系のそれぞれについて，反変基底ベクトルとして $\boldsymbol{g}^j$, $\boldsymbol{g}^{j'}$ なる 2 組の基底ベクトルを定めれば，それらは，次の関係式を満足するはずである．

$$\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta^j_i,\qquad \boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}^{j'}=\delta^{j'}_{i'} \tag{1.1.16}$$

今，新基底ベクトルを同一 variance の旧基底ベクトルに関する成分に分解し，

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\beta^j_{i'}\boldsymbol{g}_j,\qquad \boldsymbol{g}^{i'}=\beta^{i'}_j\boldsymbol{g}^j \tag{1.1.17}$$

のように表すものとすれば，これらの上式は，二つの座標系間の関係を表示する2組の九つの量を規定することになる．(1.1.16)式の後の式に(1.1.17)式を適用すれば次式が得られる．

$$\delta_{i'}^{k'}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}^{k'}=\beta_{i'}^{j}\boldsymbol{g}_j\cdot\beta_l^{k'}\boldsymbol{g}^l=\beta_{i'}^{j}\beta_l^{k'}\boldsymbol{g}_j\cdot\boldsymbol{g}^l=\beta_{i'}^{j}\beta_l^{k'}\delta_j^l=\beta_{i'}^{j}\beta_j^{k'}$$

すなわち，
$$\beta_{i'}^{j}\beta_j^{k'}=\delta_{i'}^{k'} \tag{1.1.18 a}$$

上に得られた関係式(1.1.18 a)をマトリックスの形に書き表せば，

$$\begin{bmatrix}\beta_{1'}^1 & \beta_{1'}^2 & \beta_{1'}^3\\ \beta_{2'}^1 & \beta_{2'}^2 & \beta_{2'}^3\\ \beta_{3'}^1 & \beta_{3'}^2 & \beta_{3'}^3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\beta_1^{1'} & \beta_1^{2'} & \beta_1^{3'}\\ \beta_2^{1'} & \beta_2^{2'} & \beta_2^{3'}\\ \beta_3^{1'} & \beta_3^{2'} & \beta_3^{3'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

である．すなわち，$\beta_{i'}^{j}$，$\beta_j^{k'}$ のそれぞれで形成されるマトリックスは互いに他方の逆行列であることがわかる．したがって一方の行列が既知であれば，他方の行列の要素はすべて計算できることになる．また(1.1.18 a)式と同様な次式も容易に誘導される．

$$\beta_i^{j'}\beta_{j'}^{k}=\delta_i^k \tag{1.1.18 b}$$

さて，(1.1.17)式の初めの式の両辺に $\beta_k^{i'}$ を乗ずれば，

$$\beta_k^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}=\beta_k^{i'}\beta_{i'}^{j}\boldsymbol{g}_j=\delta_k^j\boldsymbol{g}_j=\boldsymbol{g}_k \tag{1.1.19 a}$$

同様にして，
$$\beta_{i'}^{k}\boldsymbol{g}^{i'}=\boldsymbol{g}^k \tag{1.1.19 b}$$

すなわち旧基底ベクトルを新基底ベクトルの項で書き直すための関係式が得られる．

今，旧，新，双方の座標系で，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分を

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i=v^i\boldsymbol{g}_i=v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}$$

のように書き表し，v_i と $v_{i'}$ との関係を見いだすために(1.1.19)式を適用すれば，

$$\boldsymbol{v}=v_i\boldsymbol{g}^i=v_i\beta_{k'}^{i}\boldsymbol{g}^{k'}=v_{k'}\boldsymbol{g}^{k'}$$

上式の第3式及び第4式から，$\boldsymbol{g}^{k'}$ なる因数を単に消約できるか否かは，今の場合明らかではないので，まず，両辺に $\boldsymbol{g}_{j'}$ を dot product すれば，

$$v_i\beta_{k'}^{i}\boldsymbol{g}^{k'}\cdot\boldsymbol{g}_{j'}=v_{k'}\boldsymbol{g}^{k'}\cdot\boldsymbol{g}_{j'}$$

$$\therefore\quad v_i\beta_{k'}^{i}\delta_{j'}^{k'}=v_{k'}\delta_{j'}^{k'}$$

$$\therefore\quad v_i\beta_{j'}^{i}=v_{j'} \tag{1.1.20 a}$$

次に上式の両辺に $\beta_k^{j'}$ を乗ずれば，まず左辺から，

$$v_i\beta_{j'}^{i}\beta_k^{j'}=v_i\delta_k^i=v_k$$

を得る．

$$\therefore\quad v_k=v_{j'}\beta_k^{j'} \tag{1.1.20 b}$$

上の(1.1.20)式は，旧共変成分を新共変成分で表示するか，または逆に，新共変成分を旧共変成分で表示するための関係式である．同様にして，反変成分

に対する次のような変換式も得られる．すなわち，

$$\left.\begin{aligned} v^{j'} &= v^{i}\beta_{i}^{j'} \\ v^{j} &= v^{i'}\beta_{i'}^{j} \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.20\ \text{c, d})$$

一般に座標系の変換によって $\boldsymbol{g}_i$ または v_i と同様な具合いに変換される量のことを，**共変量**とよび，$\boldsymbol{g}^i$ または v^i と同様な具合いに変換される量のことを，**反変量**とよぶ．

一般に可測的幾何学空間を蔽いつくす座標網に対しては，その基底ベクトルとして，$\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ をあてがい，その結果得られる連続的な座標値 (x^1, x^2, x^3) によって形成される**共変系座標網**として，これを数学的に取扱うのが，普通であるが，必ずしもそのようにしなければならぬというわけではない．可測的幾何学空間を蔽いつくす座標網に対して，最初に，その基底ベクトルとして，$\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{g}^3$ をあてがい，その結果得られる連続的な座標値を (x_1, x_2, x_3) と名付けて《実はこの場合の $\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{g}^3$ は上記の共変系座標網での $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ と実質的には同じものであり，また，この場合の座標値 (x_1, x_2, x_3) も，実質的には，上記の共変系座標網の座標値 (x^1, x^2, x^3) と同一のものであるが，その数学的な取扱いが相違してくるだけである》，**反変系座標網**として，数学的取扱いをしても悪いわけはない．しかし，可測的幾何学空間を蔽いつくす座標網をいったん共変系座標網として定義してしまった後には，同じ空間を蔽いつくす，共変系に対応した反変系座標網が，常に存在しうるという保証はない．ただ，空間を蔽いつくす座標網をいったん，共変系座標網として取扱った場合にも，その空間内の各点毎の近傍で，共変基底ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ に対応して，常に反変基底ベクトル $\boldsymbol{g}^1, \boldsymbol{g}^2, \boldsymbol{g}^3$ を想定しうるだけである．

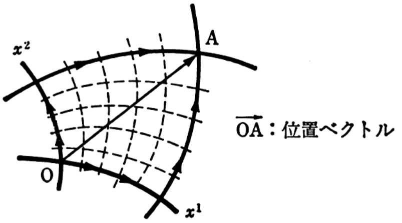
ここで，**座標値(または座標成分)**と**ベクトル成分**との区別について述べておく必要があるが，その前提としてまず，**固着ベクトル**と，**位置ベクトル**との相違について述べておこう．

一般に曲線座標系では，基底ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ は，幾何学的空間の各点毎に変化するが，固着ベクトルというのは，空間中の各点に固着したベクトルのことで，各点固有の基底ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ を用いて，常に，

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{g}_i = v_i \boldsymbol{g}^i \qquad (1.1.21)$$

のように表されるベクトルのことである．通常単にベクトルといえば，この固着ベクトルのことを意味している．この固着ベクトルに対して，幾何学的空間内の相隔たる2点を結ぶベクトルのことを，位置ベクトルと名付けるが，このベクトルは，空間中の一点から，有限な(無限小でない)距離にある他点に至るベクトルであるから，その間における基底ベクトルが，上述のように一般に刻刻と変化するので，上記の(1.1.21)式のように表すことはできないものである．

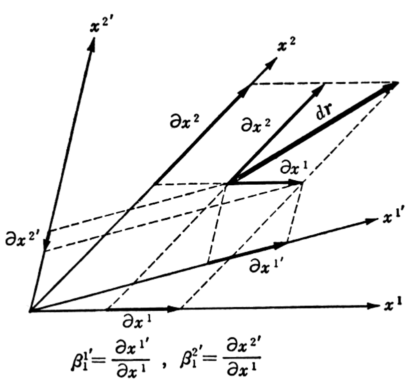
したがって，このベクトルは，直線座標系(デカルト座標系を含む)以外ではそれを成分に分解することなく，通常単に太文字のベクトル記号 $\boldsymbol{r}$ で，表すことにしている．



第6図　曲線座標系における座標成分と位置ベクトル

上述のように，直線座標系では，座標原点から或る点に至る位置ベクトルの成分と，その点の座標成分とは一致するが，一般の曲線座標系で，或る点の座標成分というのは，各点でそれぞれ異なる基底ベクトルを基準として画かれた網目の数の値をいうのであるから，座標原点からその点に至る道筋の実際の長さは，一般にその点の座標成分の値とは異なり，その通る道筋によって，まちまちである(第6図参照)．

したがってデカルト座標系で成立する式中の，座標値及び位置ベクトルの成分値は，これを曲線座標系で表示する場合には，すべて，その曲線座標系の座標値で置き換える必要があるが，それには前述の座標系変換マトリックス$[\beta^j_{i'}]$を使用することはできない．座標値(座標成分)の置換えは，通常デカルト座標系と，曲線座標系との座標間の関数関係を利用して行われるが，それは単に成分の表示に用いる座標文字が変るだけのことであって，実際の数値そのものはデカルト座標系のときと全く同じであるにすぎない．これに反して，座標系変換マトリックス $[\beta^j_{i'}]$ による変換はベクトル成分の数値そのものを変換する（ただし，テンソルとしてのベクトル自体は，前に述べたように変るのではない）テンソル表示の変換であって，等式をスカラー的な等式として取扱っているのではなく，テンソルの等式として取扱っているのである．



第7図　座標系の変換における諸関係
(分母 ∂x^1 は $x^2=$const.なるときの線分素であることに注意すること)

さて，線分素 $d\boldsymbol{r}$ は，一つの座標系 x^i において，次の二様に書き表すことができる．すなわち，

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_i dx^i=\beta^{k'}_i \boldsymbol{g}_{k'} dx^i$$

及び

$$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_{k'} dx^{k'}=\boldsymbol{g}_{k'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}dx^i$$

$$\therefore\quad \beta_i^{k'}\boldsymbol{g}_{k'}dx^i=\boldsymbol{g}_{k'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}dx^i$$

今，$d\boldsymbol{r}$ の特別な場合として，x^1 の方向にある線分素をとって考えると，この場合には，$\partial x^2=\partial x^3=0$ となり，i についての summation は単に$i=1$の項のみとなるから，上式において，$dx^i=dx^1$ なる項を約することができる．次に x^2 及び x^3 の方向にある線分素をとって $i=2$ 及び $i=3$ なる場合について，それぞれ別々に考えれば，一般に次式の成立することがわかる．

$$(\boldsymbol{g}_i=)\beta_i^{k'}\boldsymbol{g}_{k'}=\boldsymbol{g}_{k'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$$

上式の両辺に $\boldsymbol{g}^{j'}$ を dot product すれば，

$$\beta_i^{k'}\boldsymbol{g}_{k'}\cdot\boldsymbol{g}^{j'}=\boldsymbol{g}^{j'}\cdot\boldsymbol{g}_{k'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$$

すなわち，

$$\beta_i^{k'}\delta_{k'}^{j'}=\delta_{k'}^{j'}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$$

$$\therefore\quad \beta_i^{j'}=\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}\qquad(1.1.22\ \mathrm{a})$$

同様にして，

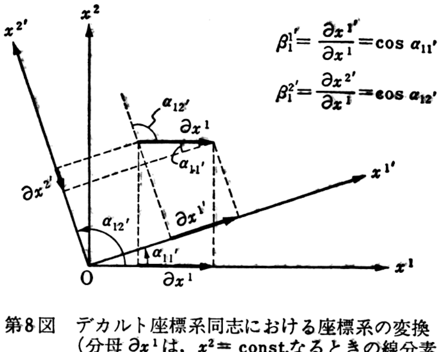
$$\beta_{j'}^{i}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\qquad(1.1.22\ \mathrm{b})$$

一般に，個々の要素については，$\beta_i^{j'}\fallingdotseq\beta_{j'}^{i}$ であるが，直交直線座標系(unit base vector とする)同士の座標系変換(回転変換)の場合には，第8図からわかるように，次の関係が成立する．

$$\beta_i^{j'}=\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i}=\cos\alpha_{ij'}=\cos\alpha_{j'i}$$

$$=\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}=\beta_{j'}^{i}\qquad(1.1.23)$$

(ただし，$\alpha_{ij'}=\alpha_{j'i}$：2方向 x^i と $x^{j'}$ とがなす角)



第8図　デカルト座標系同志における座標系の変換（分母 ∂x^1 は，$x^2=$ const.なるときの線分素であることに注意すること）

式(1.1.22)は1組の座標値を，他の座標系の座標値で表した式を微分して，$\beta_i^{j'}$ 及び $\beta_{j'}^{i}$ を求めるのに使用される．$x^i=f(x^{j'})$ または $x^{j'}=\varphi(x^i)$ のうちのいずれか一方の関係から，他方の逆関係を求めることが困難で，一方の関係のみが容易に求められる場合には(1.1.22)式の一つだけを適用し，他方の係数系 β を求めるにはしばしば，逆行列の関係式(1.1.18)式が用いられる．

係数系 β は，座標系の変換に伴うベクトル表示の成分変換（ベクトルそのものは不変)を行うために用いられる係数であるが，前節で述べた metric tensor,

g_{ij} または g^{ij} は，同一座標系内で，反変量と共変量との相互表示間の変換に用いられる係数である．係数系 β も，metric tensor の成分 g_{ij}（または g^{ij}）も，ともに，座標点の位置が異なる毎に，一般に異なる値をとるものである．

g_{ij} を新座標系に変換することを考えると，変換法について二つの証明方法が考えられる．まず第1法は，

$$g_{i'j'}=\boldsymbol{g}_{i'}\cdot\boldsymbol{g}_{j'}=\beta^k_{i'}\boldsymbol{g}_k\cdot\beta^l_{j'}\boldsymbol{g}_l=\beta^k_{i'}\beta^l_{j'}g_{kl} \qquad (1.1.24\ \text{a})$$

$$g^{i'j'}=\boldsymbol{g}^{i'}\cdot\boldsymbol{g}^{j'}=\beta^{i'}_k\boldsymbol{g}^k\cdot\beta^{j'}_l\boldsymbol{g}^l=\beta^{i'}_k\beta^{j'}_l g^{kl} \qquad (1.1.24\ \text{b})$$

同様に，

$$g_{ij}=\beta^{k'}_i\beta^{l'}_j g_{k'l'} \qquad (1.1.24\ \text{c})$$

$$g^{ij}=\beta^i_{k'}\beta^j_{l'}g^{k'l'} \qquad (1.1.24\ \text{d})$$

上式では，g の二つの添字（上付または下付）に対して，係数 β を二つ必要としている．g_{ij} または g^{ij} は，それらに掛かる β の型によって，double covariant または double contravariant とよばれるゆえんである．

次に g_{ij} 及び g^{ij} は metric tensor の成分とよばれているが，そのわけは，それが，次のように線分素の実長 $(d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s})^{1/2}$ と，(dx^i) との関係を示す式での係数であって，これによって座標空間が可測となり，かつ座標系の変換に伴い，テンソルの特性たる(1.1.24)式のようにして，表示変換されるからである．

$$d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_{i'}dx^{i'}\cdot\boldsymbol{g}_{j'}dx^{j'}=\boldsymbol{g}_i dx^i\cdot\boldsymbol{g}_j dx^j$$
$$=g_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'}=g_{ij}dx^i dx^j$$

dx^i は線分素ベクトルの成分であるから，(1.1.20 d)を右辺に適用すると，

$$g_{i'j'}dx^{i'}dx^{j'}=g_{ij}\beta^i_{i'}dx^{i'}\cdot\beta^j_{j'}dx^{j'}$$

上式は任意の線分素ベクトル $d\boldsymbol{s}$ の成分について成立するから，初めにまず $dx^{1'}$ だけが0でなく，$i'=j'=1'$ なる場合について，(1.1.24)式が成立することを確認し，しかる後に，$dx^{2'}$ または $dx^{3'}$ だけが0でなく，$i'=j'=2'$ 及び $i'=j'=3'$ なる場合についても，同様なことを確認することができる．さらに $dx^{3'}$ だけが0に等しい場合の線分素を用いて，上式の両辺からすでに相等しいことが確認されている量を引き去れば，残余の式として，次式が残される．

$$g_{1'2'}dx^{1'}dx^{2'}+g_{2'1'}dx^{2'}dx^{1'}=g_{ij}(\beta^i_{1'}\beta^j_{2'}dx^{1'}dx^{2'}+\beta^i_{2'}\beta^j_{1'}dx^{2'}dx^{1'})$$

$$\therefore\quad g_{1'2'}+g_{2'1'}=g_{ij}\beta^i_{1'}\beta^j_{2'}+g_{ji}\beta^i_{1'}\beta^j_{2'}$$

しかるに，

$$g_{1'2'}=g_{2'1'},\qquad g_{ij}=g_{ji}$$

$$\therefore\quad g_{1'2'}=g_{ij}\beta^i_{1'}\beta^j_{2'}$$

これは，(1.1.24 a) 式が $i'=1, j'=2$ なる特別な場合に成立することを示すものである．同様なことを残余のテンソル成分 $g_{2'3'}$ 及び $g_{3'1'}$ についても実施すれば，同様な結果が得られる．すなわち，(1.1.24)式が一般に成立することを立証できたわけである．これがすなわち，第2の証明法である．

1.1.6 テンソルの数学的定義

本節では，1.1.1 節で述べた事柄を，今までに得た知識をもとにして再度詳説することにする．今，旧，新両座標系で，次のように表される二つのベクトル，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を考えてみよう．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{g}^{i'}\boldsymbol{a}_{i'}\\ \boldsymbol{b}&=\boldsymbol{g}^j\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{g}^{j'}\boldsymbol{b}_{j'}\end{aligned}\right\}$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の各成分について，次のような積(これを dyadic product とよぶ)を作る．

$$c_{ij}=a_ib_j \tag{1.1.25 a}$$

$$c_{i'j'}=a_{i'}b_{j'} \tag{1.1.25 b}$$

上記の積は，ベクトルがベクトル的に配列された性格を有するもので，われわれはこれによって，可測的幾何学空間内で，ベクトルがベクトル的に配列された性格の或る1組の実在量を想定することができる．すなわち，テンソルの**第1定義**(ただし二階の場合の定義)として，**ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル $\boldsymbol{b}$ との dyadic product で作られる1組の $[\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_j]$ なる実在量をテンソルとよぶことにする**(ただし a_i 及び b_j は，それぞれ，同一座標系内の同一の基底ベクトルを基準とする二つのベクトルの成分とする)．

この場合，1組の九つの量 $c_{i'j'}$ が，他の1組の九つの量 c_{ij} と，どのような関係にあるかを調べてみよう．

$$c_{i'j'}=a_i\beta^i_{i'}b_j\beta^j_{j'}=c_{ij}\beta^i_{i'}\beta^j_{j'} \tag{1.1.26 a}$$

$$c_{ij}=a_{i'}\beta^{i'}_ib_{j'}\beta^{j'}_j=c_{i'j'}\beta^{i'}_i\beta^{j'}_j \tag{1.1.26 b}$$

すなわち，(1.1.24 a)及び(1.1.24 c)と同様な関係にあることがわかる．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の反変成分についても上記の事柄と同様な取扱いをすれば，

$$\left.\begin{aligned}c^{ij}&=a^ib^j\\ c^{i'j'}&=a^{i'}b^{j'}\end{aligned}\right\} \tag{1.1.27}$$

$$c^{i'j'}=c^{ij}\beta^{i'}_i\beta^{j'}_j \tag{1.1.28 a}$$

$$c^{ij}=c^{i'j'}\beta^i_{i'}\beta^j_{j'} \tag{1.1.28 b}$$

(1.1.24) 式に関連して導入した術語を用いれば，c_{ij} は double covariant であり，c^{ij} は double contravariant である．われわれは，これらをそれぞれ，テンソルの共変成分，または反変成分とよぶことにする．これらの成分で表示される幾何学空間内の実在量は，ベクトルのように簡単に視覚に訴えてみせることはできないが，たとえば応力や歪などについて考えてみれば，容易に理解できることである．

次に混合変化(mixed variance)のテンソル成分を次のように定義する．すなわち，

$$c^i_{\cdot j}=a^ib_j \quad \text{または} \quad c_i^{\cdot j}=a_ib^j$$

この場合にも，同様にして次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
c^{i'}_{\cdot j'} &= c^{i}_{\cdot j}\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'} \\
c_{i'}^{\cdot j'} &= c_{i}^{\cdot j}\beta^{i}_{i'}\beta^{j'}_{j}
\end{aligned}
\tag{1.1.29}
$$

一般に $a^i b_j = c^{i}_{\cdot j} \neq c_j^{\cdot i} = a_j b^i$ であるから，いずれの添字指標 (index) が先に来ているかを明示することが必要である．小さな dot mark はこれらの記号で空席の場所を明示するために使われるものである．

(1.1.25 a)式には九つの成分 c_{ij} が含まれているが，それらは単にベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ のそれぞれ三つの成分から形成される 3+3=6 個の成分だけを，互いに関連のない独立な成分となしうるのみで，九つの成分全部を互いに独立な成分となしうるわけではない．九つの成分全部を互いに独立な成分とする**一般のテンソルは，(1.1.25 a)の右辺を，少なくとも次のような 2 項の和で置き換えることによって定義される．**

$$c_{ij} = a_i b_j + d_i e_j \tag{1.1.30}$$

係数系 β による座標系の変換法則は，上式右辺の各項について適用されうることが容易にわかるから，(1.1.26)式及び(1.1.28)式と全く同様な座標系変換の法則が，この場合の c_{ij} についても成立することがわかる．すなわち，**テンソルの第 2 定義**として，**1 組の係数系 $\boldsymbol{\beta}$ による座標系変換の法則が，すべての各indexについて適用されうる，可測的幾何学空間内の或る 1 組の実在量（$\boldsymbol{c_{ij}}$ etc.）をテンソルとよぶ**と定義すれば，第 1 定義によるテンソルはすべてこのなかに包含されることになる．実際，この定義こそ，階数及び次数のいかんを問わず，常にテンソルの本質を的確に定義するもので，次に述べる第 3 定義もまた，この定義の中に包含されるものである．ただし，繰返していうが，一つのテンソルのすべての index は，同一座標系における index で，二つの座標系にまたがるものであってはならない．

さらに，**テンソル** c_{ij}（ただし，**二階**）**の第 3 定義**として，**ベクトル $\boldsymbol{a}$ を，他のベクトル $\boldsymbol{b}$ に線形変換する九つの係数 c_{ij} の 1 組によって表される実在量をテンソルとよぶ**ことにする．ただし，i, j はここでもまた同一座標系内の基底方向を示す指標とする．

すなわち，

$$a^i c_{ij} = b_j \tag{1.1.31 a}$$

上式はベクトル $\boldsymbol{a}$ のすべての成分が，別のベクトル $\boldsymbol{b}$ の個々の成分と，同一座標系内で一次的に関連している有様を示す式にほかならない．今 1 組の旧座標系 $\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}^i$ から他の組の新座標系 $\boldsymbol{g}_{i'}, \boldsymbol{g}^{i'}$ に移る場合に，座標系変換後における $\boldsymbol{a}$（ベクトルそのものは不変）の成分表示 $a^{i'}$ を，座標系変換後におけるベクトル $\boldsymbol{b}$（ベクトルそのものは不変）の成分表示 $b_{j'}$ に線形変換するためのテンソルを $c_{i'j'}$ で表すことにすれば，

$$a^{i'}c_{i'j'}=b_{j'} \qquad (1.1.31\ \mathrm{b})$$

である．この場合，$c_{i'j'}$ は c_{ij} をどのように変換(座標系の変換に伴って変換)して得られるものであるかを考えてみよう．

(1.1.31 a)式の両辺のベクトルに座標系変換則を適用して，これらのベクトルを新座標系の値で表示すれば，

$$a^{i'}\beta^{i}_{i'}c_{ij}=b_{k'}\beta^{k'}_{j}$$

いったん両辺の j を固定して，両辺に $\beta^{j}_{j'}$ を乗ずれば，

$$a^{i'}\beta^{i}_{i'}c_{ij}\beta^{j}_{j'}=b_{k'}\delta^{k'}_{j'}=b_{j'}$$

しかるに $a^{i'}c_{i'j'}\equiv b_{j'}$ でかつ $\boldsymbol{a}$ は任意のベクトルであるから，

$$c_{i'j'}=\beta^{i}_{i'}c_{ij}\beta^{j}_{j'}=c_{ij}\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}$$

すなわち，(1.1.26 a)式の成立することがわかる．

なお，$c_{i}^{\cdot k}$ なる量について，

$$c_{i}^{\cdot k}=a_{ij}b^{jk}, \qquad c_{i'}^{\cdot k'}=a_{i'j'}b^{j'k'} \qquad (1.1.32)$$

として定義すれば，上記の事柄から，

$$c_{i'}^{\cdot k'}=a_{ij}\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}b^{lk}\beta^{j'}_{l}\beta^{k'}_{k}=a_{ij}b^{lk}\beta^{i}_{i'}\beta^{k'}_{k}\delta^{j}_{l}=c_{i}^{\cdot k}\beta^{i}_{i'}\beta^{k'}_{k}$$

なることがわかる．すなわち，(1.1.29)式の第2式の成立することがわかる．

以上のように，上述の第3定義もまた，第2定義に包含せられることがわかる．

1.1.7 同一座標系内におけるテンソルの形態

前節で述べたように，テンソルの第1定義または第3定義は，すべて第2定義のなかに包含せられるものであるが，逆に第2定義による二階のテンソル量は，すべて第1定義または第3定義を満足する量である(証明略)．したがってすべての二階のテンソル量は，第1定義のような形式の成分から成るものと考えてよい．ゆえにその成分について次のような演算を行うことができる．

$$c_{ij}=a_{i}b_{j}+d_{i}e_{j}=(a_{i}b^{k}+d_{i}e^{k})g_{kj}=(a^{l}g_{li}b^{k}+d^{l}g_{li}e^{k})g_{kj}$$

上式は次のように書き表すことができる．

$$c_{ij}=c_{i}^{\cdot k}g_{kj}=c^{lk}g_{li}g_{kj} \qquad (1.1.33)$$

すなわちベクトルについて，1.1.4節で誘導したindexを上下する手続きが，テンソル成分についても当てはまることがわかる．(ただし，Kronecker's deltaは，テンソルではないから，このことは必ずしも当てはまらない．すなわち，$g_{ij}=\delta^{ik}g_{kj}\neq\delta^{i}_{j}$ である．) 上下すべきindexのおのおの一つについて，g^{ij} または g_{ij} がそれぞれ1個ずつ必要であるが，このことから，$c_{ij}, c_{i}^{\cdot j}, c^{i}_{\cdot j}$ 及び c^{ij} はそれぞれ一つの実在テンソル量に対する異種形態の成分の組であることがわかる．

一般には$c_{ij} \fallingdotseq c_{ji}$であるが，$c_{ij}=c_{ji}$なる関係を満足するような多数のテンソルに遭遇することがしばしばある．このようなテンソルは，一般に，**対称(symmetric)**であるとよばれる．このようなc_{ij}の一つの index を上げれば，次式の成立することがわかる．

$$c_i^{\cdot k}=c_{ij}g^{jk}=c_{ji}g^{jk}=c^{k}_{\cdot i}$$

このように，反変，共変は替らないで，単に添字のあとさきの順序のみが入れ替ってもよい場合には，$c_i^{\cdot k}$ または $c^{k}_{\cdot i}$ の代りに単に c_i^k と書いてもよいものとする．しかしながら，対称なテンソルであっても，一般に $c_i^k=c_k^i$ は成立しない(ただし，これは個々の成分についていっているのであって，テンソル全体としては，もちろん$[c_i^h]\equiv[c_j^g]$である)．この関係は，反変・共変の関係が逆転してもよいことを示すもので，テンソルが対称であることとは，なんら関連のある事柄ではない．

$c_{ij}=c_{ji}$なる関係が成立する場合には，両方の index を上げることによって次の関係式も同時に成立する．

$$c^{ij}=c^{ji}$$

すなわち，対称なテンソルでは，常に次の諸関係式が成立する．

$$c_{ij}=c_{ji}, \qquad c^{i}_{\cdot j}=c_j^{\cdot i}=c_j^i, \qquad c^{ij}=c^{ji} \tag{1.1.34}$$

以上のことから，一般の場合には，index は単に数値を示す指標ではなく，前後の位置で示される座標軸方向を示す性質をもっていることがわかる．

また，時々，次の関係式を満足するテンソルに遭遇することがある．

$$c_{ij}=-c_{ji} \tag{1.1.35}$$

上式は $i=j$ なる場合には $c_{ij}=0$ なることを包含している．この種のテンソルは，**反対称(antimetric)または斜対称(skew-symmetric)**とよばれる．次に示すように，すべての二階のテンソル c_{ij} は，常に対称テンソルと，反対称テンソルとの和として書き表すことができる．すなわち，

$$c_{ij}=\frac{1}{2}(c_{ij}+c_{ji})+\frac{1}{2}(c_{ij}-c_{ji}) \tag{1.1.36}$$

今，$\frac{1}{2}(c_{ij}+c_{ji})=a_{ij}$，$\frac{1}{2}(c_{ij}-c_{ji})=b_{ij}$ とおけば，二つのテンソル，a_{ij}，b_{ij} はそれぞれ次の関係を満足している．

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad b_{ij}=-b_{ji}$$

すなわち，a_{ij} は対称テンソルであり，b_{ij} は反対称テンソルであることが証明され，c_{ij} はこれら二つのテンソルの和として示されることがわかる．

次にもし，a_{ij} が対称テンソルで，b^{ij} が反対称テンソルである場合には，

$$a_{ij}b^{ij}=0 \tag{1.1.37}$$

なる関係が常に成立することを容易に証明しうる．すなわち，

$$a_{ij}(b^{ij}+b^{ji})=0 \quad \therefore \quad a_{ij}b^{ij}+a_{ji}b^{ji}=0 \quad \therefore \quad 2a_{ij}b^{ij}=0$$

さらに上に述べた対称テンソル及び反対称テンソルの性質は，それが一つの座標系で成立すれば，座標系を変換した他の座標系でも，常に成立することも容易に証明しうる．

また，$g_{ik}g^{jk}=g_i^j$ なる関係式は，g_{ik} の index k を上げたものと解釈できるが，metric tensor g_{ik} または g^{jk} が基底ベクトルの dot product から形成されることを考えると，metric tensor は，常に対称テンソルであることが容易に理解されるから，その混合変化テンソルは，g_i^j と記されるべきであり，これは前述のように，Kronecker の delta に等しい．すなわち，

$$g_i^j=\delta_i^j \tag{1.1.38}$$

Kronecker の delta を δ_i^j の形に書いたときは，上式のように混合変化テンソル g_i^j に等しいが，Kronecker の delta δ_{ij} または δ^{ij} は元来テンソルではないから（座標系の変換法則に従って変化しないから)，上の (1.1.38) 式は，座標系のいかんを問わず，常に成立するものである．

なお，a_{ij} と a^{ij} とは variance の type を異にすることを意味し，逆行列などとは，別に関係がないことにも注意しておこう．

以上は二階のテンソルについて述べてきたが，三階のテンソルは次のような関係を満足するものである．

$$a_ib_jc_k=d_{ijk} \quad \text{or} \quad a_{ij}b_k=d_{ijk} \quad \text{or} \quad a^id_{ijk}=b_{jk} \tag{1.1.39}$$

高階のテンソルについても，共変成分または反変成分なる術語を使用することができるが，高階のテンソルは，実に多種類の形態を有する．たとえば，d_{ijk}, $d_i{}^j{}_k$, $d^{ij}{}_k$, $d_i{}^{jk}$, etc. である．三階のテンソルでは，その index を一つ上げ下げする毎に，一つの g-factor があればよいが，座標系変換の場合には，常に 3 個の β-factor を同時に必要とする．

高階のテンソルの対称，反対称については，ある一対の下付添字または上付添字に関して，このような術語が使われる．たとえば後述の交代テンソル ϵ_{ijk} は任意の一対の下付添字に関して反対称である．

$$\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}=-\epsilon_{ikj}=-\epsilon_{kji}$$

また，後述の弾性係数，E^{ijlm} は ij の pair 及び lm の pair について対称である．すなわち，

$$E^{ijlm}=E^{jilm}=E^{jiml}=E^{ijml}$$

しかし，一般に，$E^{ijlm}\neq E^{iljm}$ である．

1.1.8 縮約(Contraction)及びテンソル方程式の普遍性

同一の index が一つは下付添字，他の一つは上付添字としてある場合には，

これらは dummy index とよばれて，summation convention を意味することは前に述べた．同一の index が二つとも，下付としてあるとか，または二つとも，上付としてあるとかいう場合は，デカルト座標系の場合だけであって，一般にはそのようなことはない．デカルト座標系では，index が上付であることと，下付であることとは同一であるが，他の座標系では意味が異なり，同一の index が二つとも，上付または下付であるような場合は，二階のテンソルが二つのベクトルの dot product で作られることを考え合せると，

$$a_i \boldsymbol{g}^i b_i \boldsymbol{g}^i = a_i b_i \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}^i = c_{ii} g^{ii}$$

となって，base vector に関する因数が残留し，c_{ii} だけが単独に存在することは一般にありえないからである．

次に一つのテンソルの等式において，その右辺で同一の index が繰返されていても，左辺でその index が繰返されていない場合には，左辺において，その index を固定的に指定していることを意味しているので，この等式の右辺においても，summation convention をとらないことを意味することに注意する必要がある．また，同一の index を繰返し使用しても，それが文字でなく数字（1 または 2 または 3）で示されている場合，たとえば 1 が繰返し使用されている場合には，1 の方向を固定的に指定していることを意味するから，summation convention はとらないのである．さらに同一の index を繰返し使用している場合に，それが文字であっても，たとえば，平面極座標系の場合に，その文字が i, j などでなく，r, θ の文字である場合には，特定の r 方向または θ 方向を指定しているのであるから，summation convention はとらないのである．

以上のほか，通常ならば summation convention を意味する場合に，特に summation convention をとらないことを意味したい場合には，その index を大文字で記する慣行がある．

二階のテンソルで，同一の index が，下付及び上付として一つずつ繰返し使用されている場合には，前にも述べた通り，もはや，free index はなくなり，それらの添字のついた文字の積は，単なる数値（scalar）の和となる．すなわち，

$$c_i^{\cdot i} = a$$

三階のテンソルでは，次のように，ベクトル（成分）となる．すなわち，

$$c_i^{\cdot ij} = c^{\cdot\cdot j} = a^j, \qquad c_i^{\cdot ji} = c^{\cdot j \cdot} = b^j$$

しかし上記の二つのベクトルは，一般に相異なることに注意しなければならぬ．上記のような操作を，**縮約（contraction）**とよぶことは，すでに述べた通りであるが，縮約は，常に二つの index を吸収消滅させるから，この操作はテ

ンソルの階数を二つだけ低下させることになる．この意味において，ベクトルは一階のテンソルであり，スカラーは零階のテンソルである．縮約はもちろん，テンソルの性質をもつ二つの成分の積に対しても適用される．たとえば，$c_{ij}=c_i^{\cdot k}g_{kj}$ は四階のテンソル $c_i^{\cdot k}g_{kj}$ で生ずる縮約の例である．

一般に，テンソルの等式が，その意義を有するためには，いずれの項も同一階数，同一文字の free indices を同一の variance としてもっていなければならない．このことも，すでに前述した通りであるが，たとえば，テンソル方程式，

$$a_{ij}b^{jk}=r_{il}s^{lm}u_m^{\cdot k}+c_{in}d^{nk}$$

を例にとると，すべての項を左辺に集めれば，この方程式は，次のような形のものになるはずである．

$$A_i^{\cdot k}=0 \qquad (i, k : \text{free index, } 1 \text{ or } 2 \text{ or } 3)$$

もし，すべての項を他の座標系に表示変換するならば，その結果は，

$$A_{i'}^{\cdot k'}=A_i^{\cdot k}\beta_{i'}^{i}\beta_k^{k'}$$

となり，右辺は i, k 二つの dummy indices による summation convention を表しているけれども，個々の $A_i^{\cdot k}$ が初めの座標系で，常に 0 に等しいのであるから，0 なる値の和を示していることになる．すなわち，

$$A_{i'}^{\cdot k'}=0$$

である．上の例では，旧座標系で $A_i^{\cdot k}=0$ なる場合であったが，旧座標系で，

$$A_{ik}=0 \quad \text{または} \quad A^{ik}=0$$

なる場合にも同様なことがいえる．すなわち，

$$A_{i'k'}=A_{ik}\beta_{i'}^{i}\beta_{k'}^{k}=0 \quad \text{または} \quad A^{i'k'}=A^{ik}\beta_i^{i'}\beta_k^{k'}=0$$

上の例では，座標系の変換の際に，free indices のみを新座標系の indices に変換し，dummy indices については，座標系の変換を行わなかったが，同一添字が，異なる variance として，繰返し登場している限り，その必要のないことは，証明をまつまでもないことである．

上記の事柄から，次のことがいえる．すなわち，

『いかなる形のテンソルの等式であっても，もしそれが，一つの座標系で成立するならば，そのテンソルの等式を，任意の座標系に表示変換した等式もまた，常に，この新座標系において成立する．換言すれば，或るテンソルの等式が物語っている事実は，座標系のいかんを問わず，常に不変である．』

上記の結果は，きわめて重要な結論であり，物理方程式を誘導する際に，きわめて有効な解析手段を提供するものである．物理方程式を誘導する場合に，必要な事柄をいったんデカルト座標系で成立する方程式として誘導しておいて，そのなかのテンソル成分に相当する部分を，一般のテンソル記号で表した

ものに書き直せば，座標系のいかんを問わず，常に成立する式が得られることになる．

第1.2章　テンソルと線形変換

1.2.1　線形変換(Linear transformation)

同一の座標系内で,(座標をそのままとして)任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ を変換する場合に，ベクトル $\boldsymbol{w}$ の成分から，別のベクトル $\boldsymbol{u}$ または $\boldsymbol{v}$ の成分が,

$$a_{ij}w^j = u_i, \qquad a_{ij}w^i = v_j \tag{1.2.1}$$

のようにして，得られる場合には，前にも述べた通り, a_{ij} は二階のテンソルであるが，上式の左辺は，ベクトル $\boldsymbol{w}$ の成分の一次式であるから，この意味で，二階のテンソルはベクトルに対して線形変換であるといわれる．一般に，テンソルはベクトルと dot product をするとき，そのベクトル成分を一次変換して，もとの作用テンソルよりも，一次だけ低い別のテンソル成分に変換するので，この意味でテンソルは，常に線形変換の働きをするといわれる．

一般に (1.2.1) 式が成立する場合には，次の関係式もまた，同時に成立することを容易に証明することができる(証明略)．すなわち,

$$\left.\begin{aligned} &a^{i}_{\cdot j}w^j = u^i, \qquad a_i^{\cdot j}w_j = u_i, \qquad a^{ij}w_j = u^i \\ &a^{i}_{\cdot j}w_i = v_j, \qquad a_i^{\cdot j}w^i = v^j, \qquad a^{ij}w_i = v^j \end{aligned}\right\} \tag{1.2.2}$$

すなわち，ベクトル $\boldsymbol{w}$ の index がテンソルの indices のなかの後のものに作用して，別のベクトル $\boldsymbol{u}$ を生ずる式は，テンソルの形態がどのような形態の場合であっても，すべて等価な式であり，またベクトル $\boldsymbol{w}$ の index がテンソルの indices のなかの前のものに作用して，別のベクトル $\boldsymbol{v}$ を生ずる式は，テンソルの形態がどのような形態の場合であっても，すべて等価な式である．換言すれば**テンソルの indices と，ベクトルの index との作用の仕方が，テンソルの indices のなかの，同じ順番の index に作用する式はすべて等価である．**

1.2.2　座標系の回転変換によるベクトルの表示変換と，同一座標系内でのベクトルの回転変換との関係

1.1.5 節では，ベクトルを元のままの状態に保ち，座標系の変換を行った場合，そのベクトルの表示が，どのようにして変換されるかについて考察した．すなわち,

$$\beta^{i'}_{j}u^j = u^{i'} \quad \text{or} \quad \beta^{j}_{i'}u_j = u_{i'}$$

この場合，基底ベクトル $\boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}^j$ は，1.1.5 節で述べた通り，次のように変換さ

れた．

$$\beta^{j}_{i'}\boldsymbol{g}_{j}=\boldsymbol{g}_{i'} \quad \text{or} \quad \beta^{i'}_{j}\boldsymbol{g}^{j}=\boldsymbol{g}^{i'}$$

座標系変換の係数マトリックス $[\beta^{i'}_{j}]$ または $[\beta^{j}_{i'}]$ は，線形変換の性質を有することは明らかであるが，ベクトルを同一座標系内で変換して，別のベクトルを作るような線形変換，すなわちテンソルとは異なり，或るベクトルそのものは，元のままに保ち，座標系を変換して，元のベクトルの成分表示を変換する変換である．したがって座標系変換の係数 $\beta^{i'}_{j}$ は，二つの座標系にまたがる添字指標をもっている．

今，座標系 (j) を，反時計回りに θ だけ回転変換する場合の，座標系の変換を行う係数のマトリックスを，$[\beta^{i'}_{j}]$ とし，一方，同一の座標系内でベクトル $\boldsymbol{u}$ を時計回りに θ だけ回転して，別のベクトル $\boldsymbol{v}$ を作るテンソルを $[a_{ij}]$ とすれば，マトリックス $[\beta^{i'}_{j}]$ とテンソル $[a_{ij}]$ とは，数値的には同一の要素で作られたマトリックスであることは明白である．このような特別な場合には，座標系の変換を行う係数のマトリックスと，同一座標系内で，ベクトルを変換して別のベクトルを作るテンソルとは，数値的に一致することはあるわけであるが，一方はあくまでもマトリックスであり，他方はテンソルであることの区別を忘れてはならない．

1.2.3　対称変換

テンソルは，すでに述べてきた通り，同一座標系内で，一つのベクトルを変換して，別のベクトルを作る線形変換であるが，この場合，テンソルが対称テンソルである変換を**対称変換**という．

テンソル $[a_{ij}]$ が対称テンソルである場合に，これを matrix form で書けば，

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

のように，マトリックス形の対角線要素 (a_{11}, a_{22}, a_{33})《この対角線を trace とよぶ》に対して，他の要素(成分)がちょうど対称に配列されている．しかし $[a_{ij}]$ が対称テンソルであっても，一般に，

$$a^{i}_{j}=a_{kj}g^{ki}\neq a_{ik}g^{kj}=a^{j}_{i}$$

である．すなわち，混合変化の対称テンソル $[a^{i}_{j}]$ を matrix form で書き表した場合には，

$$\begin{bmatrix} a^{1}_{1} & a^{2}_{1} & a^{3}_{1} \\ a^{1}_{2} & a^{2}_{2} & a^{3}_{2} \\ a^{1}_{3} & a^{2}_{3} & a^{3}_{3} \end{bmatrix}$$

の trace に対して，対称の位置にある要素（成分），たとえば a^1_2 と a^2_1 とは，相等しくない．一般に混変テンソル形態では，旧座標系 (i, j, k) でのテンソル表示が，たとえ対角形（trace 以外の成分がすべて 0 なる配列形）になっていても，新座標系 (i', j', k') に，そのテンソルを表示変換すれば，対称テンソル，非対称テンソルを通じて，

$$a^{\cdot i'}_{\cdot j'} = a^{\cdot i}_{\cdot i}\beta^{j'}_{i}\beta^{i}_{j'} \neq a^{\cdot i}_{\cdot i}\beta^{j'}_{i}\beta^{i}_{i'} = a^{\cdot j'}_{\cdot i'}$$

となって，新座標系 (i', j', k') でのテンソル表示は，対称的な配列にならない．しかし，このことは，テンソルが本来，対称テンソルであるか否かという問題とは別問題であることに注意する必要がある．

また，非対称テンソルでは，もちろん，

$$a^{\cdot i'}_{\cdot j'} \neq a_{j'}^{\cdot i'}$$

であって，これは，

$$\left.\begin{array}{l} i'=1' \\ j'=1' \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} i'=2' \\ j'=2' \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} i'=3' \\ j'=3' \end{array}\right\}$$

なる個々の場合にも通用する．すなわち，それぞれ個々に，$a^{\cdot 1'}_{\cdot 1'} \neq a_{1'}^{\cdot 1'}$, $a^{\cdot 2'}_{\cdot 2'} \neq a_{2'}^{\cdot 2'}$, $a^{\cdot 3'}_{\cdot 3'} \neq a_{3'}^{\cdot 3'}$ であるが，対称テンソル，非対称テンソルを通じて，それらの summation convention をとったもの，

$$a^{\cdot i'}_{\cdot i'} = a_{j'}^{\cdot k'} g^{i'j'} g_{k'i'} = a_{j'}^{\cdot k'} \delta^{j'}_{k'} = a_{j'}^{\cdot j'} = a_{i'}^{\cdot i'}$$

$$\text{i.e.,} \quad a^{\cdot i'}_{\cdot i'} = a_{i'}^{\cdot i'}$$

なる式は，常に成立することに注意しておく必要がある．

対称テンソルによる変換すなわち対称変換は，以下に述べるような性質をもっている．

テンソル $[a_{ij}]$ が対称テンソルであれば，

$$a_{ij}u^i v^j = a_{ji}u^i v^j$$

しかるに，$a_{ji}u^i v^j$ なる summation convention は，$a_{ij}u^j v^i$ と書き表しても，同じことであるから，結局，次式が成立する．

$$a_{ij}u^i v^j = a_{ij}u^j v^i$$

上の結果を，言葉でいい表せば，次のようにいうことができる．

『テンソル $[a_{ij}]$ が対称テンソルである場合には，先順の添字指標 i に，ベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分が，dot product として作用し，$[a_{ij}]$ の後順の添字指標 j に，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分が dot product として作用する演算は，$[a_{ij}]$ の後順の添字指標 j に，ベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分が，dot product として作用し，$[a_{ij}]$ の先順の添字指標 i に，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分が，dot product として作用する演算に等しい．つまり，**対称テンソル $[a_{ij}]$ と，二つのベクトル $\boldsymbol{u}$ 及び $\boldsymbol{v}$ との dot product では，添字指標の作用順序は無関係である．**』

前記の事柄の逆もまた成立することは，明白である．

次に，テンソル $[a_{ij}]$ が対称テンソル，すなわち $a_{ij}=a_{ji}$ ならば，これを座標系の変換によって，表示変換をして $[a_{i'j'}]$ を作っても，$a_{i'j'}=a_{j'i'}$ なる性質は変らない．換言すれば，**対称テンソルは，座標系の変換を行っても依然として，対称テンソルである．** 何となれば，

$$a_{i'j'}=a_{ij}\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}=a_{ji}\beta^{i}_{i'}\beta^{j}_{j'}=a_{j'i'}$$

上式はテンソルが他の形態のテンソルである場合にも，同様にして証明できることである．このことは，一般に座標系の変換ということが，単に表示の変換に止まり，テンソルの本質そのものの変換でないことを想起すれば，初めから自明のことといえる．

1.2.4　テンソルの固有値及び固有ベクトル

テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ の固有値及び固有ベクトルの定義：**λ(または λ') を或る数値 (scalar 量) とするとき，ベクトル $\boldsymbol{u}$(または $\boldsymbol{v}$) が，テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ に対して，**

$$a^{i}_{\cdot j}u_i=\lambda u_j \quad \text{または} \quad a^{i}_{\cdot j}v^j=\lambda' v^i \tag{1.2.3}$$

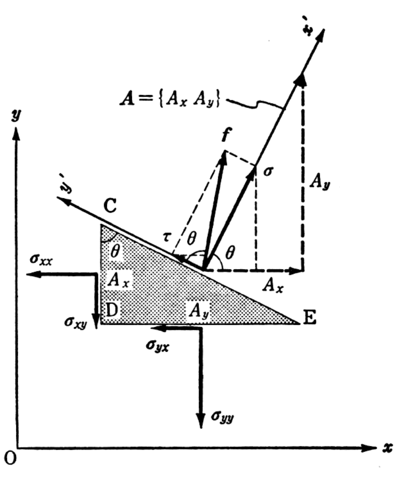
なる関係を満足するとき，ベクトル $\boldsymbol{u}$(または $\boldsymbol{v}$) をテンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ の固有ベクトル《eigen vector》といい，数値 λ(または λ') を，ベクトル $\boldsymbol{u}$(または $\boldsymbol{v}$) に対するこのテンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ の固有値 (eigen value) という．ただし，$[a^{i}_{\cdot j}]$ は必ずしも対称テンソルとはかぎらないものとする．

上記の事柄を，具体的な例について説明しよう．まず，話を簡単にするために，物体内部の平面応力を，デカルト座標系を用いて考察してみる．第 9 図において，微小三角形ブロック CDE の釣合いを考えてみると，斜方向の面 $\boldsymbol{A}$ に作用する力 $\boldsymbol{F}$ は，

$$\boldsymbol{F}=A\boldsymbol{f}=A\cdot\{\sigma\ \ \tau\}$$

であるから，この微小三角形ブロックの釣合い条件は，次のように表される．

$$\{A_x\ \ A_y\}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}=A\{\sigma\ \ \tau\}\cdot\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$



第 9 図　平面応力の釣合い

したがってもし，面 $\boldsymbol{A}$ が主応力の作用する面である場合には，上式において，$\tau=0$ となるから，上式は次のように表されることになる．すなわち，

$$\{A_x\ \ A_y\}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}=A\sigma\{\cos\theta\ \ \sin\theta\}=\sigma\{A_x\ \ A_y\}$$

すなわち，上式を indicial notation で示せば次のようになる．

$$\sigma_{ij}A_i=\sigma A_j$$

上式は，デカルト座標系について述べたので，共変・反変の区別を必要としなかったが，主応力面 $\boldsymbol{A}$ における上式の関係を，一般の座標系の場合について書けば，

$$\sigma^{i}_{\cdot j}dA_i=\sigma\cdot dA_j \tag{1.2.4}$$

なる式を得る．上の(1.2.4)式と前述の(1.2.3)式とを，対比してみれば，ただちにわかるように，この場合，主応力面 $d\boldsymbol{A}$ は，(1.2.3)式の固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ に相当し，主応力 σ は(1.2.3)式の固有値 λ に相当している．

さて，(1.2.3)式から，次のことがいえる．

『$a^{i}_{\cdot j}u_i=\lambda u_j$ が成立する場合には，$a_i^{\cdot j}u^i=\lambda u^j$, $a_{ij}u^i=\lambda u_j$, $a^{ij}u_i=\lambda u^j$ もまた，同時に成立する．』

次に座標系の変換を行う場合について考えてみよう．今，$a^{i}_{\cdot j}u_i=\lambda u_j$ が成立する場合に，座標系の変換を行えば，

$$(a^{i'}_{\cdot j'}\beta^{i}_{i'}\beta^{j'}_{j})\cdot(\beta^{k'}_{i}u_{k'})=\lambda\beta^{k'}_{j}u_{k'}$$

$$\therefore\quad a^{i'}_{\cdot j'}\beta^{j'}_{j}\delta^{k'}_{i'}u_{k'}=\lambda\beta^{k'}_{j}u_{k'}$$

$$a^{i'}_{\cdot j'}\beta^{j'}_{j}u_{i'}=\lambda\beta^{k'}_{j}u_{k'}$$

両辺に $\beta^{j}_{l'}$ を乗ずれば，

$$a^{i'}_{\cdot j'}\delta^{j'}_{l'}u_{i'}=\lambda\delta^{k'}_{l'}u_{k'}$$

$$\therefore\quad a^{i'}_{\cdot l'}u_{i'}=\lambda\delta^{k'}_{l'}u_{k'}$$

$$\therefore\quad a^{i'}_{\cdot l'}u_{i'}=\lambda u_{l'}\qquad \text{i.e.,}\quad a^{i'}_{\cdot j'}u_{i'}=\lambda u_{j'}$$

すなわち，**或るベクトル $\boldsymbol{u}$ が $[a^{i}_{\cdot j}]$ の固有ベクトルであれば，$\boldsymbol{u}$ はまた，座標系の変換を行った場合のテンソル $[a^{i'}_{\cdot j'}]$ に対しても，固有ベクトルであって，かつその固有値は不変である．** このこともまた，座標系の変換が，単なる表示形式の変換にすぎず，テンソルの本質そのものの変換ではないことを想起すれば，証明をまつまでもなく，初めから自明のことといえる．

さらに，**或るベクトル $\boldsymbol{u}$ が $[a^{i}_{\cdot j}]$ の固有ベクトルであれば，$\alpha\boldsymbol{u}$（ただし，α は任意の単なる或る数値とする）もまた，固有ベクトルであって，かつその固有値も同じである．** このこともまた，証明を要するまでもあるまい．

1.2.5 非対称テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ の固有方程式

今ベクトル $\boldsymbol{v}$ が非対称テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ の固有ベクトルであるとする. 固有ベクトルの定義(1.2.3)式から,

$$a^{i}_{\cdot j}v_i=\lambda v_j$$

上式は, Kronecker の delta を用いて次のように表すことができる.

$$(a^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^{i}_{j})v_i=0 \tag{1.2.5}$$

上式(1.2.5)を展開式で書けば,

$$\left.\begin{array}{l}(a^{1}_{\cdot 1}-\lambda)v_1+a^{2}_{\cdot 1}v_2+\cdots+a^{n}_{\cdot 1}v_n=0\\ a^{1}_{\cdot 2}v_1+(a^{2}_{\cdot 2}-\lambda)v_2+\cdots+a^{n}_{\cdot 2}v_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a^{1}_{\cdot n}v_1+a^{2}_{\cdot n}v_2+\cdots+(a^{n}_{\cdot n}-\lambda)v_n=0\end{array}\right\}$$

したがって, 次の行列方程式が成立しなければならない.

$$\begin{vmatrix}(a^{1}_{\cdot 1}-\lambda) & a^{2}_{\cdot 1} & a^{3}_{\cdot 1}\cdots\cdots a^{n}_{\cdot 1}\\ a^{1}_{\cdot 2} & (a^{2}_{\cdot 2}-\lambda) & a^{3}_{\cdot 2}\cdots\cdots a^{n}_{\cdot 2}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a^{1}_{\cdot n} & a^{2}_{\cdot n} & a^{3}_{\cdot n}\cdots(a^{n}_{\cdot n}-\lambda)\end{vmatrix}=0 \tag{1.2.5'}$$

すなわち, (1.2.5)式に対するすべての固有値 λ の値は(1.2.5′)式の根である. この方程式を, テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ の**固有方程式**とよぶ. この固有方程式は簡潔に

$$\det(a^{i}_{\cdot j}-\lambda\delta^{i}_{j})=0 \tag{1.2.6}$$

のように表すことができる. またテンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ を $[A]$ で表し, 単位行列を $[E]$ で表せば, (1.2.6)式はまた,

$$\det(A-\lambda E)=0 \tag{1.2.7}$$

のように表すこともできる. 固有方程式の左辺にある行列式を展開して得られる λ に関する多項式を**固有多項式(または特性多項式)**とよぶ.

前節に述べたように, 固有値 λ は, 座標系の変換によって, 不変であるから, 固有方程式の根は座標系の変換を行っても不変でなければならぬ. 換言すれば, テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ の固有方程式は座標系の変換に無関係である. したがって, **固有多項式を, λ の降羃の順に書けば, λ の各次数の項の係数は, 座標系の変換に無関係な値でなければならない.**

次に,

$$a^{i}_{\cdot j}w^{j}=\lambda' w^{i} \tag{1.2.8}$$

なる固有ベクトルがあるとすれば, 前の場合と同様にして,

$$(a^{i}_{\cdot j}-\lambda'\delta^{i}_{j})w^{j}=0 \tag{1.2.9}$$

$$\therefore\quad \det(a^{i}_{\cdot j}-\lambda'\delta^{i}_{j})=0 \tag{1.2.10}$$

が得られる. この方程式(1.2.10)式は, (1.2.6)式と同じであるから,

$$\lambda'=\lambda \tag{1.2.11}$$

である．

このようにして得られた固有値λを (1.2.5) 式または (1.2.9) 式に代入すれば，固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ または $\boldsymbol{w}$ のそれぞれの成分の比率が求められる．このような固有ベクトルは，それぞれ，固有方程式のn個の根 λ 毎に求められるから，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ について，それぞれn個のベクトルが求められる(ただし，これらは実ベクトルであるとはかぎらない)．

もしも，仮にこれらの2組の固有ベクトル群が，同一組のものであるとすれば，

$$\left.\begin{array}{l} a^{i}_{\cdot j}v_i=\lambda v_j \\ a^{i}_{\cdot j}v^j=\lambda v^i \end{array}\right\}$$

が同時に成立しなければならないが，上式の後の式は(1.2.2)式の関係から，

$$a_j{}^i v_i=\lambda v_j$$

と書き直すことができるから，これと，初めの式とから，この場合，

$$a^{i}_{\cdot j}v_i=a_j{}^i v_i$$

なる関係式が成立しなければならないことになる．このような関係が一般的に成立するためには，

$$a^{i}_{\cdot j}=a_j{}^i=a^i_j$$

でなければならない．すなわち，このテンソルは対称でなければならないことになる．最初に仮定したように，$[a^{i}_{\cdot j}]$が非対称テンソルで，$a^{i}_{\cdot j}\neq a_j{}^i$ であるとすれば，上の結果は仮定に反することになる．したがって，**$[a^{i}_{\cdot j}]$ が非対称テンソルである場合には，n 個の固有ベクトルから成る2組のベクトル群は，同一組のものでなく，別々の2組でなければならぬ**ことがわかる．

さらに，$\lambda_{(m)}$ 及び $\lambda_{(n)}$ を(1.2.5′)式または(1.2.6)式の二つの相異なる実根とし，$v_{(m)i}$ 及び $v_{(n)k}$ を，それぞれ(1.2.5)式によって求められた，対応の固有ベクトルとすれば，次の二つの式が成立するはずである．

$$a^{i}_{\cdot j}v_{(m)i}=\lambda_{(m)}v_{(m)j} \quad 及び \quad a^{k}_{\cdot l}v_{(n)k}=\lambda_{(n)}v_{(n)l}$$

上式の第2式の両辺に，g^{il} を乗ずると，その左辺は，

$$a^{k}_{\cdot l}g^{il}v_{(n)k}=a^{ki}g_{jk}v^{j}_{(n)}=a_j{}^i v^{j}_{(n)}$$

となるから，次の二つの式が成立しなければならぬ．

$$a^{i}_{\cdot j}v_{(m)i}=\lambda_{(m)}v_{(m)j} \quad 及び \quad a_j{}^i v^{j}_{(n)}=\lambda_{(n)}v^{i}_{(n)} \qquad (1.2.12\ \mathrm{a,b})$$

上式(1.2.12 a)の両辺に $v^{j}_{(n)}$ を乗じ，また(1.2.12 b)式の両辺に $v_{(m)i}$ を乗ずれば，

$$a^{i}_{\cdot j}v_{(m)i}v^{j}_{(n)}=\lambda_{(m)}v_{(m)j}v^{j}_{(n)}, \qquad a_j{}^i v_{(m)i}v^{j}_{(n)}=\lambda_{(n)}v_{(m)i}v^{i}_{(n)}$$

なる関係式が得られる．これらの式の左辺は，もしも $a^{i}_{\cdot j}=a_j{}^i$ ならば相等しく，また，$a^{i}_{\cdot j}=a_j{}^i$ なるときに限って，相等しい．したがって，テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ が

対称テンソルであるときに限り，次式が成立する．すなわち，

$$(\lambda_{(m)}-\lambda_{(n)})v_{(m)j}v^j_{(n)}=0 \qquad (\text{ただし，} m\neq n)$$

しかるに，$(\lambda_{(m)}-\lambda_{(n)})$ は仮定により，0に等しくない．

$$\therefore \quad v_{(m)j}v^j_{(n)}=0 \qquad (\text{ただし，} m\neq n) \tag{1.2.13}$$

上式は，相異なる固有値，$\lambda_{(m)}, \lambda_{(n)}$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{(m)}$ と $\boldsymbol{v}_{(n)}$ とは，互いに直交することを意味している．したがって次のことがいえる．

『もしも，テンソル $[a^{ij}]$ が対称テンソルであって，そのすべての固有値が，相異なる実根であれば，これらの固有値に対応する固有ベクトルは，実ベクトルであって，かつそれらはすべて直交する．しかしテンソル $[a^{ij}]$ が非対称テンソルであれば，このような事柄は必ずしも成立するとはかぎらない．』

また a^{ij} が非対称テンソルであれば，前述のようにベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ とは別のベクトルであったが，a^{ij} が対称テンソルである場合には，先順の index と，後順の index の順序の区別はなくなるからもちろん前述のベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ との区別はなくなり，ただ一組の固有ベクトルがあるだけとなる．

テンソル $[a^i_{\cdot j}]$ が対称テンソル $[a^i_j]$ である場合に，その固有方程式(1.2.5′)または(1.2.6)が実の等根を有する場合については，証明を簡単にするために，三次元の場合について考察することにするが，n 次元の場合も，同様なことがいえる．

まず，三次元二階のテンソル $[a^i_j]$ の固有方程式は，(1.2.5′)式から，

$$f(\lambda)\equiv\begin{vmatrix}(a^1_1-\lambda) & a^1_2 & a^1_3\\ a^2_1 & (a^2_2-\lambda) & a^2_3\\ a^3_1 & a^3_2 & (a^3_3-\lambda)\end{vmatrix}=0 \tag{1.2.14}$$

となる．上式(1.2.14)は，これを展開すると，次のようになる（ただし，次式では，λ の肩の数字は，羃数を示すものとする）．

$$f(\lambda)\equiv-\lambda^3+(a^1_1+a^2_2+a^3_3)\lambda^2-\left(\begin{vmatrix}a^1_1 & a^1_2\\ a^2_1 & a^2_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2_2 & a^2_3\\ a^3_2 & a^3_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^1_1 & a^1_3\\ a^3_1 & a^3_3\end{vmatrix}\right)\lambda$$
$$+\begin{vmatrix}a^1_1 & a^1_2 & a^1_3\\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3\\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3\end{vmatrix}=0 \tag{1.2.15}$$

(1.2.14) または (1.2.15) 式が，二重根と一つの相異なる実根を有する場合には，連立方程式

$$\left.\begin{aligned}(a^1_1-\lambda)v_1+a^2_1v_2+a^3_1v_3=0\\ a^1_2v_1+(a^2_2-\lambda)v_2+a^3_2v_3=0\\ a^1_3v_1+a^2_3v_2+(a^3_3-\lambda)v_3=0\end{aligned}\right\} \tag{1.2.16}$$

に二重根 $\lambda=\lambda_{(1)}=\lambda_{(2)}$ を代入すると，上式(1.2.16)は一つの恒等的でない方程式に帰着する《この意味は (1.2.16)の三つの方程式のうち，一つが恒等式でな

く，その係数のうちに0でないものがあり，そして他の二つの方程式は，それから導かれるということである》．何となれば，

三次の多項式，$f(\lambda)$ は，次の形に書き直すことができる．すなわち，

$$f(\lambda)\equiv(\lambda-\lambda_{(1)})(\lambda-\lambda_{(2)})(\lambda-\lambda_{(3)}) \tag{1.2.17}$$

今，$\lambda_{(1)}=\lambda_{(2)}\neq\lambda_{(3)}$ なる場合には，$f(\lambda)$ は，

$$f(\lambda)\equiv(\lambda-\lambda_{(1)})^2(\lambda-\lambda_{(3)}) \tag{1.2.18}$$

となる．したがって，$\lambda_{(1)}$ が二重根のときには，$\lambda=\lambda_{(1)}$ を代入すると，多項式自身だけでなく，その一次導関数も0になるが，その二次導関数は0にならないことがわかる．

$$f(\lambda_{(1)})=0,\qquad f'(\lambda_{(1)})=0,\qquad f''(\lambda_{(1)})\neq0$$

上の三つの式を，実際に，(1.2.14)式について書き下してみると，

$$f(\lambda_{(1)})\equiv\begin{vmatrix}(a^1_1-\lambda_{(1)}) & a^1_2 & a^1_3\\ a^2_1 & (a^2_2-\lambda_{(1)}) & a^2_3\\ a^3_1 & a^3_2 & (a^3_3-\lambda_{(1)})\end{vmatrix}=0 \tag{1.2.19}$$

$$\begin{aligned}f'(\lambda_{(1)})&\equiv\begin{vmatrix}-1 & a^1_2 & a^1_3\\ 0 & (a^2_2-\lambda_{(1)}) & a^2_3\\ 0 & a^3_2 & (a^3_3-\lambda_{(1)})\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(a^1_1-\lambda_{(1)}) & 0 & a^1_3\\ a^2_1 & -1 & a^2_3\\ a^3_1 & 0 & (a^3_3-\lambda_{(1)})\end{vmatrix}\\&\quad+\begin{vmatrix}(a^1_1-\lambda_{(1)}) & a^1_2 & 0\\ a^2_1 & (a^2_2-\lambda_{(1)}) & 0\\ a^3_1 & a^3_2 & -1\end{vmatrix}\\&\equiv-\begin{vmatrix}(a^1_1-\lambda_{(1)}) & a^1_2\\ a^2_1 & (a^2_2-\lambda_{(1)})\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(a^2_2-\lambda_{(1)}) & a^2_3\\ a^3_2 & (a^3_3-\lambda_{(1)})\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(a^1_1-\lambda_{(1)}) & a^1_3\\ a^3_1 & (a^3_3-\lambda_{(1)})\end{vmatrix}\\&=0\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

$$f''(\lambda_{(1)})\equiv2\{(a^1_1-\lambda_{(1)})+(a^2_2-\lambda_{(1)})+(a^3_3-\lambda_{(1)})\}\neq0 \tag{1.2.21}$$

上の三つの式 (1.2.19)，(1.2.20)，(1.2.21) の各左辺は，ちょうど，固有多項式(1.2.15)の左辺の λ の冪の各係数と同様な形をしている．(1.2.15)式で λ^2 の係数が0でなく，λ の係数及び常数項が，共に0であるならば，行列式，

$$\begin{vmatrix}a^1_1 & a^1_2 & a^1_3\\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3\\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3\end{vmatrix}$$

のすべての列は，ある一つの列に比例している．このことと，ちょうど同様に，今の場合には，$f(\lambda_{(1)})$ のすべての列は，ある一つの列に比例していることがわかる．すなわち，固有方程式が二重根 $\lambda_{(1)}=\lambda_{(2)}$ と一つの相異なる実根 $\lambda_{(3)}$ とを有するときには，(1.2.16)式に $\lambda=\lambda_{(1)}=\lambda_{(2)}$ を代入すると，(1.2.16) 式は，一つの恒等的でない方程式に帰着することがわかる．

したがって，固有方程式(1.2.14)が，二重根 $\lambda=\lambda_{(1)}=\lambda_{(2)}$を有するときには，(1.2.16)式に，$\lambda=\lambda_{(1)}=\lambda_{(2)}$ を代入すると，(1.2.16) 式を満足する $\lambda=\lambda_{(1)}$ に対応する固有ベクトルの成分比，$v_{(1)1}:v_{(1)2}:v_{(1)3}$は無数に存在することがわかる．また，(1.2.16)式に，$\lambda=\lambda_{(3)}$を代入すると，この連立方程式の任意の2式から，$\lambda=\lambda_{(3)}$ に対応する固有ベクトルの成分比，$v_{(3)1}:v_{(3)2}:v_{(3)3}$ が確定的に一通りに定められる．このとき連立方程式(1.2.16)の残余の1式は $\lambda=\lambda_{(3)}$ が，

固有方程式(1.2.14)を満足する限り，当然成立することはいうまでもない．

翻って，$\lambda=\lambda_{(1)}$ 及び $\lambda=\lambda_{(3)}$ は二つの相異なる実根であるから，これらに対応する二つの固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{(1)}$ と $\boldsymbol{v}_{(3)}$ とは，(1.2.13)式で示したように直交しなければならないことがわかる．

したがって，まず，固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{(3)}$ の方向を，連立方程式(1.2.16)から一通りに定めて，これに直交する平面内で《(1.2.16)式は，$\lambda=\lambda_{(1)}$ のとき，上述のように，恒等的でない一つの方程式に帰着するが，この1個の方程式は平面の方程式である》，任意の互いに直交するベクトル $\boldsymbol{v}_{(1)}$, $\boldsymbol{v}_{(2)}$ をとれば，$\boldsymbol{v}_{(1)}$, $\boldsymbol{v}_{(2)}$, $\boldsymbol{v}_{(3)}$ は互いに直交する三つの固有ベクトルとなることがわかる．

次に(1.2.14)式または(1.2.15)式が三重根 $\lambda=\lambda_{(1)}=\lambda_{(2)}=\lambda_{(3)}$ を有するときには，連立方程式，(1.2.16)式に $\lambda=\lambda_{(1)}=\lambda_{(2)}=\lambda_{(3)}$ を代入すると，(1.2.16)式のすべての方程式の係数は全部0に等しくなって恒等式になることを，上述の証明と同様な証明法によって，証明することができる．したがって固有方程式が三重根を有するときには，(1.2.16)式を満足する固有ベクトルの方向は，全く任意であってよく，なんらの制限もないことがわかる．すなわち，三重根の場合には，任意の直交する3軸を，固有ベクトルの方向としてとることができる．

以上述べてきた事柄から，結局，次のことが結論としていえる．

『もしもテンソル $[a^{ij}]$ が対称テンソルであって，そのすべての固有値が，実根であれば，これらの固有値に対応する固有ベクトルは，すべて互いに直交する三つの実ベクトルである．しかし，テンソル $[a^{ij}]$ が非対称テンソルである場合には，このことは，必ずしも当てはまらない．』

次に話を n 次元の場合に戻し，テンソル $[a^{i}{}_{j}]$ を対称テンソル $[a^{i}_{j}]$ だけに限定して考察を進めることにする．この場合，固有方程式 (1.2.5) 式または (1.2.6) 式は，はたして複素根を有することがあるだろうか，について考えてみるに，今，仮に $\lambda_{(1)}=R+iS$ 及び $\lambda_2=R-iS$ なる一対の複素根（ただし，R, S は共に実数とする）が，固有方程式(1.2.6)の根として存在し，これらに対応する固有ベクトルとして，$v_{(1)j}=u_j+iw_j$ 及び，$v_{(2)j}=u_j-iw_j$（ただし u_j, w_j は共に実数とする）が求められたものとしよう．この場合，(1.2.13) 式に相当するベクトルの直交関係式は，

$$(u_j+iw_j)(u^j-iw^j)\equiv u_ju^j+w_jw^j+i(w_ju^j-u_jw^j)=0$$

となる．上式の丸括弧内の二つの項は相等しく互いに打消し合い，残余の項はそれぞれ実ベクトル $\boldsymbol{u}$ 及び $\boldsymbol{w}$ 自身の dot product であるから，2項とも正値であって，その和は0とはなりえないことがわかる．これは矛盾であるから，**対称テンソル $[a^{i}_{j}]$ の固有方程式(1.2.5)または(1.2.6)は，根として複素固有値をもたない**ことがわかる．しかし，この場合の証明には $[a^{i}{}_{j}]$ が対称テンソ

ル $[a_j^i]$ であることを利用しているので，**もし，テンソル $[a^i_{\cdot j}]$ が，非対称テンソルであれば，(1.2.5)または(1.2.6)式は根として複素固有値をもたないとは断言できない．**

1.2.6 非対称テンソルの実例

例 1 変位勾配テンソル $[u^j|_i]$

まだ，共変微分記号については説明をしていないので，今は，デカルト座標系だけを考え，$u^j|_i=\dfrac{\partial u^j}{\partial x^i}$ を表すものと了解しておいてもらいたい．そうすると，$[u^j|_i]$ は，前節で述べた非対称テンソル $[a^j_{\cdot i}]$ に相当するもので，一般に変位勾配テンソルとよばれているものである．そして $[u^j|_i]$ とベクトル dx^i との dot product, $(u^j|_i)dx^i$ は，点 x^i に固着した基底枠 $\boldsymbol{g}_j$ に関する，点 x^i+dx^i の点 x^i に対する併進相対変位ベクトルの j 成分を示している．歪テンソル $[\varepsilon_i^j]$ は，次のように，この変位勾配テンソル $[u^j|_i]$ の対称部分である．

$$[u^j|_i]=\frac{1}{2}[(u^j|_i+u_i|^j)]+\frac{1}{2}[(u^j|_i-u_i|^j)]$$

$$=[\varepsilon_i^j]+\frac{1}{2}[(u^j|_i-u_i|^j)]$$

この場合，線分素ベクトル $d\boldsymbol{x}=\{dx^1\ dx^2\ dx^3\}$ の末端の相対変位，$(u^j|_i)dx^i$ がベクトル $\{dx^i\}$ 自身の方向と，同方向であるような，線分素ベクトル $\{dx^i\}$ があるかどうかを調べてみよう．

$$(u^j|_i)dx^i=\lambda dx^j$$

$$\therefore\quad (u^j|_i-\lambda\delta_i^j)dx^i=0 \qquad (1.2.22)$$

上式はすべての上付添字及び下付添字をそれぞれ下付及び上付に変更すれば，(1.2.4) 式と同形であることがわかる．したがってこの場合の固有方程式は，(1.2.15)式を参照して次のように表される．

$$\lambda^3-u^i|_i\lambda^2+\frac{1}{2}(u^i|_iu^j|_j-u^i|_ju^j|_i)\lambda-\det(u^i|_j)=0 \qquad (1.2.23)$$

今，簡単のために，x^i を，unit base vector $\boldsymbol{g}^i=\boldsymbol{i}_i$ の平面デカルト座標系における座標成分とし，平面変位場

$$u^1=\alpha x^2,\qquad u^2=\beta x^1,\qquad u^3=0$$

を考えることにしよう《第10図(b)参照》．この場合，固有方程式(1.2.23)は，

$$\lambda^3-\alpha\beta\lambda=0$$

となる．この固有方程式は，次の三つの相異なる根を有する．すなわち，

$$\lambda_{(1)}=\sqrt{\alpha\beta},\qquad \lambda_{(2)}=-\sqrt{\alpha\beta},\qquad \lambda_{(3)}=0$$

これらの固有値に対応する固有ベクトルとして，連立方程式(1.2.22)式，すな

わち,

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \alpha & 0 \\ \beta & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{Bmatrix} = 0$$

i.e.,

$$\left.\begin{aligned} -\lambda dx^1 + \alpha dx^2 &= 0 \\ \beta dx^1 - \lambda dx^2 &= 0 \\ -\lambda dx^3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

に，上に得た固有値を代入して，次のように，三つのベクトルを得る.

$$\left.\begin{aligned} dx^2_{(1)} &= \sqrt{\beta/\alpha}\,dx^1 \\ dx^3_{(1)} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} dx^2_{(2)} &= -\sqrt{\beta/\alpha}\,dx^1 \\ dx^3_{(2)} &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} dx^1_{(3)} &= dx^2_{(3)} = 0 \\ dx^3_{(3)} &\neq 0 \end{aligned}\right\}$$

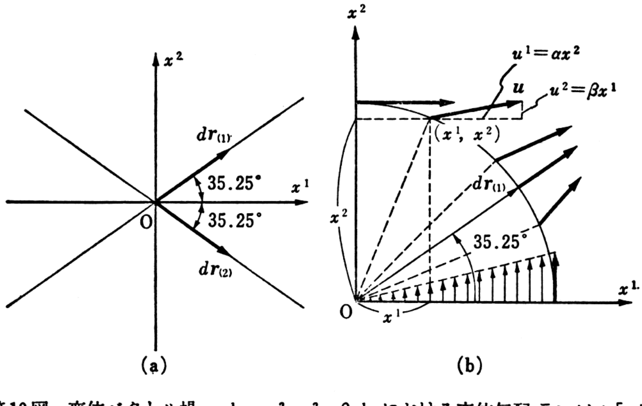
上の第3の固有ベクトルは，x^1, x^2 平面に垂直で，他の二つの固有ベクトルは，

$$d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{i}_1 \pm \sqrt{\beta/\alpha}\,\boldsymbol{i}_2)\,dx^1$$

である．今，$\alpha = 2\beta$ とすれば，固有ベクトル $d\boldsymbol{r}_{(1)}, d\boldsymbol{r}_{(2)}$ はそれぞれ,

$$d\boldsymbol{r}_{(1)} = (\boldsymbol{i}_1 + \sqrt{1/2}\,\boldsymbol{i}_2)\,dx^1, \qquad d\boldsymbol{r}_{(2)} = (\boldsymbol{i}_1 - \sqrt{1/2}\,\boldsymbol{i}_2)\,dx^1$$

となる《第10図(a)参照》．この場合の変位ベクトル場の状況は，第10図(b)に示しておいた.



第10図　変位ベクトル場，$u^1 = \alpha x^2$, $u^2 = \beta x^1$, における変位勾配テンソル $[u^j|_i]$ の主軸方向（固有ベクトル），$(u^j|_i)\,dx^i = \lambda dx^j$

$\beta = 0$ なる場合には，三つの固有値 $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)} = 0$ となり，固有方程式は三重根をもっている．このときは，第3の固有ベクトルは，上記の場合と同じであるが，$d\boldsymbol{r}_{(1)}, d\boldsymbol{r}_{(2)}$ は x^1 軸方向に一致し，変位勾配テンソル $[u^j|_i]$ は，単に二つの主軸方向をもっていることがわかる.

$\beta < 0$ なる場合には，$d\boldsymbol{r}_{(1)}, d\boldsymbol{r}_{(2)}$ は複素ベクトルとなるから，この場合には，実の固有ベクトルは，第3の固有ベクトルだけということになる.

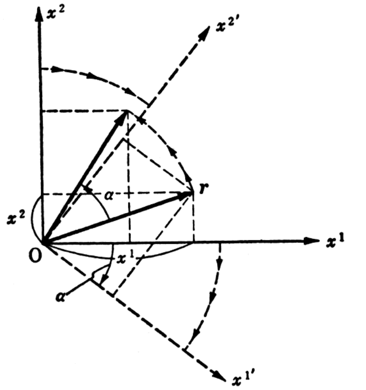
以上の変位勾配テンソル $[u^j|_i]$ の例では，非対称テンソルの後順の index に,

線分素ベクトル dx^i を作用させて，線形変換を行い，微小相対変位ベクトルを得る場合の実例を示したのであるが，上述のように，固有ベクトルは必ずしも直交せず，その他，対称テンソルで必ず満足されるような性質が，必ずしも満足されていないのは，非対称テンソルであるがゆえである．

例 2　デカルト座標系における回転変換テンソル

簡単のために三次元でなく平面のデカルト座標系における回転変換テンソルを例にとることにする．このテンソルは，次のように表される．

$$\begin{bmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 2} \\ a^{2}_{\cdot 1} & a^{2}_{\cdot 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$



第11図　平面での回転変換（この変換は，その回転角αと逆方向の座標軸の回転による座標系の変換と同じであることを示す）

このテンソルに，位置ベクトル $\boldsymbol{r}=\{x^1, x^2\}$ を作用させて，元の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向を得るような，固有ベクトル $\boldsymbol{r}$ は，このテンソルが回転変換テンソルであることを考えれば，実在しないであろうことは，予想できることである．

このテンソルの固有方程式を作ると，

$$\begin{vmatrix} (\cos\alpha-\lambda) & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & (\cos\alpha-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

この行列式を展開すると，

$$\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$$

これから固有値は，

$$\lambda_{(1),(2)} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha = e^{\pm i\alpha}$$

すなわち，予想通り実数の固有値は存在しない．連立方程式

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \end{Bmatrix}$$

i. e.,
$$\left.\begin{aligned}(\cos\alpha-\lambda)u^1-\sin\alpha\cdot u^2=0\\ \sin\alpha\cdot u^1+(\cos\alpha-\lambda)u^2=0\end{aligned}\right\}$$

の第1式(または第2式)に，上に得た $\lambda_{(1),(2)}$ の値を代入して次のような二つの固有ベクトルを得る．すなわち，

$$(\mp i\sin\alpha)u^1-(\sin\alpha)u^2=0$$

$$\therefore\quad \frac{u_{(1)}^2}{u_{(1)}^1}=\frac{-i}{1},\qquad \frac{u_{(2)}^2}{u_{(2)}^1}=\frac{i}{1}$$

今の場合，デカルト座標系を考えているので，index の上，下は問題ではないが，回転角 α の回転テンソルを

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^1_{\cdot 1} & a^1_{\cdot 2}\\ a^2_{\cdot 1} & a^2_{\cdot 2}\end{bmatrix}$$

のように考えて，その後順の index に作用する固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ を考えたのであるが，もし，同じテンソルの先順の index に作用する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を考えれば，

$$\{v_1\ \ v_2\}\cdot\begin{bmatrix}a^1_{\cdot 1} & a^1_{\cdot 2}\\ a^2_{\cdot 1} & a^2_{\cdot 2}\end{bmatrix}=\{v_1\ \ v_2\}\cdot\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

この変換は，デカルト座標系では，$-\alpha$ の回転変換を意味している．この場合にも，その固有方程式は，前の場合と全く同じになるから，固有値は前の場合と同一になる．これから固有ベクトルを求めるための連立方程式は，今度は，

$$\left.\begin{aligned}(\cos\alpha-\lambda)v_1+\sin\alpha\cdot v_2=0\\ -\sin\alpha\cdot v_1+(\cos\alpha-\lambda)v_2=0\end{aligned}\right\}$$

となる．ゆえに，固有値 $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ の値を上式に代入して得られる固有ベクトルは，

$$\frac{v_{(1)2}}{v_{(1)1}}=\frac{i}{1},\qquad \frac{v_{(2)2}}{v_{(2)1}}=\frac{-i}{1}$$

となる．すなわち，

$$\frac{u_{(1)}^2}{u_{(1)}^1}=\frac{-i}{1}\neq\frac{v_{(1)2}}{v_{(1)1}}=\frac{i}{1},\qquad \frac{u_{(2)}^2}{u_{(2)}^1}=\frac{i}{1}\neq\frac{v_{(2)2}}{v_{(2)1}}=\frac{-i}{1}\tag{A}$$

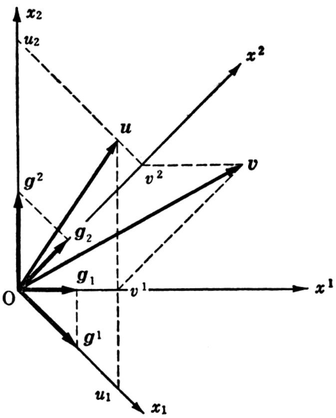
しかし，

$$\frac{u_{(1)}^2}{u_{(1)}^1}=\frac{v_{(2)2}}{v_{(2)1}},\qquad \frac{u_{(2)}^2}{u_{(2)}^1}=\frac{v_{(1)2}}{v_{(1)1}}\tag{B}$$

となっているので，デカルト座標系のような特別の場合には，結局，固有ベクトルは同じ1組になるが，それでも同一固有ベクトルに対する固有値は，二つの場合で互いに相異なる．テンソル $[a^{\alpha}_{\cdot\beta}]$ をデカルト座標系における単なる回転変換と考えず，一般の座標系において，

$$\begin{bmatrix}a^1_{\cdot 1} & a^1_{\cdot 2}\\ a^2_{\cdot 1} & a^2_{\cdot 2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

によって規定される或る変換と考えた場合にも，上記（A）式及び(B)式と同じ結果を得るが，このような一般の場合には(B)式のような関係が成立しても，これらのベクトルはすべて相異なるベクトルである．たとえば，上記の場合とは異なるが，二つの実ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ において，それらの共変成分と反変成分とが互いに等しい場合には，これらの二つのベクトルは，第 12 図に示されるような相互関係にある．



第12図　共変成分と反変成分とが互に相等しい二つのベクトル $\boldsymbol{u}$ 及び $\boldsymbol{v}$

1.2.7 対称テンソルの固有ベクトルを基底ベクトルとする座標系への座標系変換

対称テンソルの場合には，前々節(1.2.13)式及びそれ以下の説明で述べたように，固有ベクトルは，常に互いに直交する実ベクトルである．

もし，これらの固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{(m)}=v^i_{(m)}\boldsymbol{g}_i$ を，新基底ベクトル $\boldsymbol{g}_{m'}=\beta^i_{m'}\boldsymbol{g}_i$ として用いるならば，固有ベクトルの反変成分 $v^i_{(m)}$ は，座標系の変換係数 $\beta^i_{m'}$ と同じものであるから，固有ベクトルの直交関係式(1.2.13)は，次のように書き表すことができる．すなわち，

$$v^i_{(m)}v^j_{(n)}g_{ij}=0 \qquad (\text{ただし，} m\neq n)$$

$$\therefore \quad \beta^i_{m'}\beta^j_{n'}g_{ij}=0 \qquad (m'\neq n')$$

$$\therefore \quad g_{m'n'}=0 \qquad (m'\neq n')$$

上式は，前に得た直交関係式にほかならない．

一方，固有ベクトルの元の関係式(1.2.4)は，次のように書くこともできる．

$$a_{ij}v^i_{(m)}=\lambda_{(m)}\delta^i_j v_{(m)i}\equiv\lambda_{(m)}g^{ik}g_{jk}v_{(m)i}\equiv\lambda_{(m)}g_{jk}v^k_{(m)}\equiv\lambda_{(m)}g_{ij}v^i_{(m)}$$

上式の $v^i_{(m)}$ を $\beta^i_{m'}$ で置き換え，かつ両辺に $\beta^j_{n'}$ を乗ずると，

$$a_{ij}\beta^i_{m'}\beta^j_{n'}\equiv a_{m'n'}=\lambda_{(m)}g_{ij}\beta^i_{m'}\beta^j_{n'}=\lambda_{(m)}g_{m'n'} \qquad \text{(A)}$$

を得る．したがって，

$$a_{m'n'}\begin{cases}=0 & (m'\neq n')\\ \neq 0 & (m'=n')\end{cases}$$

次に，対称テンソル $[a^j_i]$ を，上記の新座標系に，座標系変換を行って得られるテンソルの表示形 $[a^{n'}_{m'}]$ は，上記の(A)式を用いて，

$$a_{m'}^{n'}=a_{p'm'}g^{p'n'}=\lambda_{(m)}g_{p'm'}g^{p'n'}=\lambda_{(m)}\delta_{m'}^{n'} \qquad \text{(B)}$$

となる．

さらにまた，対称テンソル $[a^{ij}]$ を，上記の新座標系に，座標系変換を行って得られるテンソル表示形 $[a^{m'n'}]$ は，(B)式の結果を用いて，

$$a^{m'n'}=a_{p'}^{m'}g^{p'n'}=\lambda_{(m)}\delta_{p'}^{m'}g^{p'n'}=\lambda_{(m)}g^{m'n'}\begin{cases}=0 & (m'\neq n')\\ \neq 0 & (m'=n')\end{cases} \qquad \text{(C)}$$

となる．ゆえに，上に得た結果から次のことがいえる．

『対称テンソル $[a_{ij}]$, $[a_i^j]$ 及び $[a^{ij}]$ を，それらの固有ベクトル，($\boldsymbol{v}_{(m)}=v_{(m)}^i\boldsymbol{g}_i$) を基底ベクトル ($\boldsymbol{g}_{m'}=\beta_{m'}^i\boldsymbol{g}_i$) とする座標系に，座標系変換すれば，これらの対称テンソルは，それぞれ対角形，(A)式，(B)式，(C)式として表される．しかし非対称テンソルではこのようなことはいえない．』

1.2.8　二次曲面とその標準形

直交をも含めて，一般の斜交直線座標系を x, y, z とするとき，三次元空間中にある二次曲面は，一般に次のように表される．

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2(a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz)+2(a_{01}x+a_{02}y+a_{03}z)+a_{00}=0 \qquad (1.2.24)$$

上式は，マトリックス形を用いて，

$$\{x\ \ y\ \ z\}\cdot\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}+2\{a_{01}\ \ a_{02}\ \ a_{03}\}\cdot\begin{Bmatrix}x\\ y\\ z\end{Bmatrix}+a_{00}=0 \qquad (1.2.25)$$

のように表され，さらに indicial notation を用いて，

$$a_{ij}x^ix^j+2a_{0i}x^i+a_{00}=0 \qquad (i=1,2,3\ ;\ j=1,2,3) \qquad (1.2.26)$$

と表すこともできる《ただし，上式(1.2.26)では $x^1=x, x^2=y, x^3=z$ とする》．この式の左辺の第一項は dummy index ばかりであるから，この式の左辺の各項はすべて scalar であることがわかる．すなわち a_{00} は scalar，a_{0i} はベクトル，a_{ij} は二階の対称共変テンソルであることがわかる．

今，対称テンソル $[a_{ij}]$ を，座標系の変換によって，固有ベクトルを共変基底ベクトルとする座標系の表示にすれば，前節の結論から(1.2.25)式は次のようになる．

$$\{x^{1'}\ \ x^{2'}\ \ x^{3'}\}\cdot\begin{bmatrix}a_{1'1'} & & 0\\ & a_{2'2'} & \\ 0 & & a_{3'3'}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x^{1'}\\ x^{2'}\\ x^{3'}\end{Bmatrix}$$

$$+2\{a_{01'}\ \ a_{02'}\ \ a_{03'}\}\cdot\begin{Bmatrix}x^{1'}\\ x^{2'}\\ x^{3'}\end{Bmatrix}+a_{00}=0 \qquad (1.2.27)$$

対称テンソルの固有ベクトルは，既述のように直交するから，上式(1.2.27)はデカルト座標系$(x^{i'})$による二次曲面の表示式である．

前節に述べたように$a_{1'1'}=\lambda_{(1)}g_{1'1'}$, $a_{2'2'}=\lambda_{(2)}g_{2'2'}$, $a_{3'3'}=\lambda_{(3)}g_{3'3'}$であるから，対称テンソル $[a_{ij}]$ の固有値 $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ のいずれも 0 でない限り，$a_{1'1'}\neq 0$, $a_{2'2'}\neq 0$, $a_{3'3'}\neq 0$ である．今，座標原点を$(c^{1'}, c^{2'}, c^{3'})$に移し，座標軸を平行移動した座標系を，$X^{i'}$ で表すことにすれば，(1.2.27)式は，

$$\begin{aligned}&a_{1'1'}(X^{1'})^2+a_{2'2'}(X^{2'})^2+a_{3'3'}(X^{3'})^2+2\{(a_{1'1'}c^{1'}+a_{01'})X^{1'}\\&\quad+(a_{2'2'}c^{2'}+a_{02'})X^{2'}+(a_{3'3'}c^{3'}+a_{03'})X^{3'}\}+\{a_{1'1'}(c^{1'})^2+a_{2'2'}(c^{2'})^2\\&\quad+a_{3'3'}(c^{3'})^2+2(a_{01'}c^{1'}+a_{02'}c^{2'}+a_{03'}c^{3'})+a_{00}\}=0\end{aligned}\qquad(1.2.28)$$

（ただし，上式で丸括弧の外肩にある数字は羃数を示す．以下においても同様とする）

となるから，固有値がいずれも 0 でない限り，次の連立方程式

$$\left.\begin{aligned}a_{1'1'}c^{1'}+a_{01'}=0\\a_{2'2'}c^{2'}+a_{02'}=0\\a_{3'3'}c^{3'}+a_{03'}=0\end{aligned}\right\}\qquad(1.2.29)$$

を解いて，$(c^{1'}, c^{2'}, c^{3'})$を求めることができる．このようにして求めた点$(c^{1'}, c^{2'}, c^{3'})$に，座標原点を移動すれば，(1.2.28)式は

$$\begin{aligned}&a_{1'1'}(X^{1'})^2+a_{2'2'}(X^{2'})^2+a_{3'3'}(X^{3'})^2+\{a_{1'1'}(c^{1'})^2+a_{2'2'}(c^{2'})^2+a_{3'3'}(c^{3'})^2\\&\quad+2(a_{01'}c^{1'}+a_{02'}c^{2'}+a_{03'}c^{3'})+a_{00}\}=0\end{aligned}\qquad(1.2.30)$$

なる形に表される．

対称テンソル $[a_{ij}]$ の固有方程式は，固有ベクトルの関係式

$$(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})v^i=0$$

から，

$$\det(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})=0\qquad(1.2.31)$$

であるが，上式を展開すれば，上式は，

$$\lambda^3-a_{ii}\lambda^2+\frac{1}{2}(a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ij})\lambda-\det(a_{ij})=0\qquad(1.2.32)$$

i.e.,

$$\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\left(\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{13}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}\right)\lambda-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix}=0\qquad(1.2.33)$$

のように表される．したがって，固有値 $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$のいずれもが 0 でなく，そのため $a_{1'1'}, a_{2'2'}, a_{3'3'}$ のいずれも 0 でない場合には，(1.2.32) 式の $\det(a_{ij})\neq 0$ であるはずである．換言すれば，(1.2.29) 式が解を有するときには，$\det(a_{ij})\neq 0$ である．この逆も常に成立し，これは二次曲面が，有心二次曲面である場合に相当する．

もし，$\det(a_{ij})=0$ ならば，固有値 $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ のなかの少なくとも一つは 0 である．今仮に $\lambda_{(3)}=0$ で $\lambda_{(1)}\fallingdotseq 0, \lambda_{(2)}\fallingdotseq 0$ なる場合を仮定すれば，(1.2.27) 式は，

$$\{x^{1'}\ x^{2'}\}\cdot\begin{bmatrix} a_{1'1'} & 0 \\ 0 & a_{2'2'} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{Bmatrix}+2\{a_{01'}\ a_{02'}\ a_{03'}\}\cdot\begin{Bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{Bmatrix}+a_{00}=0 \qquad (1.2.34)$$

となる．今，座標軸を平行移動し，原点を次の連立方程式

$$\left.\begin{aligned} a_{1'1'}c^{1'}+a_{01'}=0 \\ a_{2'2'}c^{2'}+a_{02'}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (a_{1'1'}\fallingdotseq 0,\ \ a_{2'2'}\fallingdotseq 0)$$

を満足する点 $(c^{1'}, c^{2'}, 0)$ に移動した座標系を $(X^{1'}, X^{2'}, x^{3'})$ とすれば，(1.2.34) 式は，

$$\begin{aligned} &a_{1'1'}(X^{1'})^2+a_{2'2'}(X^{2'})^2+2a_{03'}x^{3'}+\{a_{1'1'}(c^{1'})^2+a_{2'2'}(c^{2'})^2 \\ &\qquad +2(a_{01'}c^{1'}+a_{02'}c^{2'})+a_{00}\}=0 \end{aligned}$$

i.e., $a_{1'1'}(X^{1'})^2+a_{2'2'}(X^{2'})^2+2a_{03'}x^{3'}+\{(a_{01'}c^{1'}+a_{02'}c^{2'})+a_{00}\}=0$ (1.2.35)

となる．ここでもし，$a_{03'}\fallingdotseq 0$ ならば，さらに原点を，

$$2a_{03'}c^{3'}+(a_{01'}c^{1'}+a_{02'}c^{2'}+a_{00})=0$$

を満足する $c^{3'}=x^{3'}$ なる点に，座標軸と共に平行移動した座標系を $(X^{1'}, X^{2'}, X^{3'})$ とすれば，(1.2.35)式は，結局，

$$a_{1'1'}(X^{1'})^2+a_{2'2'}(X^{2'})^2+2a_{03'}X^{3'}=0 \qquad (1.2.36)$$

となり，またもし，$a_{03'}=0$ ならば，(1.2.35)式は，

$$a_{1'1'}(X^{1'})^2+a_{2'2'}(X^{2'})^2+(a_{01'}c^{1'}+a_{02'}c^{2'}+a_{00})=0 \qquad (1.2.37)$$

なる形になる．このように $\det(a_{ij})=0$ であって，固有値 $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ のいずれかが 0 であるような場合は，二次曲面が無心二次曲面である場合に相当する．

(1.2.30)式，(1.2.36)式及び(1.2.37)式のような形に表した二次曲面の方程式を，**二次曲面の標準形**という．

1.2.9 対称テンソルの実例

例 1 断面二次率テンソル

デカルト座標系では，一点Pの座標成分は，同時に位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のベクトル成分でもある．今，物体の一つの xy-断面(x, y 座標軸を含む断面)内の一点 P, (x, y) について，

$$\begin{bmatrix} xx & xy \\ xy & yy \end{bmatrix} \qquad (\mathrm{A})$$

なる二次元テンソルを考えれば，これは一つの対称テンソルである．このようなテンソルを，xy 断面内のすべての点について加え合せて，次のような断面二

次率のマトリックス，

$$\begin{bmatrix} \left(I_{xx}=\int xxdA\right) & \left(I_{xy}=\int xydA\right) \\ \left(I_{yx}=\int yxdA\right) & \left(I_{yy}=\int yydA\right) \end{bmatrix} \tag{B}$$

を作れば，このマトリックスもまた，一つの対称テンソルである．何となればデカルト座標系では，base vector はすべての点について一定であり，またデカルト座標系同士の間では，座標系変換係数 β もまた，すべての点について同一であるからである．上の断面二次率テンソルは，対称テンソルであるから，物体の断面形がどのような場合でも，直交する二つの主軸方向(固有ベクトル)を有することがわかる．

断面内の一点 P(x,y) に対する対称テンソル(A)の主軸は明らかに，位置ベクトルの方向と，これに直角な方向とであるが，ある断面全体の二次率テンソルの主軸方向は，断面内のすべての点に関する総合結果によって定まる方向である．

今，上述の場合の座標原点を，断面の図心(重心)とし，図心以外の点 (a,b) を通り，元の x 軸，y 軸に平行な座標軸を x',y' とするとき，

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= \int_{(A)}(x-a)(y-b)\,dA = \int_{(A)}xy\,dA - a\int_{(A)}y\,dA - b\int_{(A)}x\,dA + abA \\ &= I_{xy} + abA \end{aligned}$$

であるから，一般に図心以外の点を通る座標軸に関する断面二次率テンソルの主軸方向は，図心を通る座標軸に関する断面二次率テンソルの主軸方向とは相異なることがわかる．

なお上述のように，断面二次率テンソルは，二次元テンソルであるから，一つの平面デカルト座標系 x,y における値と，原点を共有する他の平面デカルト座標系 x',y' における値とは，常に応力や歪に関する Mohr の円と同じように，Mohr 円を画く相互関係にあるから，Mohr 円を画いて容易に一方の座標系における値から，他の座標系における値を求めることができる．

例 2　慣性相乗モーメント，テンソル

例 1 では，物体の或る一つの断面における断面二次率テンソルを考えたが，今，物体の或る一点を原点とする三次元デカルト座標系を考え，この座標系の x,y,z 軸に関する次のような相乗モーメントのマトリックスを考える．

$$\begin{bmatrix} \left(I_{xx}=\int_{(V)} xxdv\right) & \left(I_{xy}=\int_{(V)} xydv\right) & \left(I_{xz}=\int_{(V)} xzdv\right) \\ \left(I_{yx}=\int_{(V)} yxdv\right) & \left(I_{yy}=\int_{(V)} yydv\right) & \left(I_{yz}=\int_{(V)} yzdv\right) \\ \left(I_{zx}=\int_{(V)} zxdv\right) & \left(I_{zy}=\int_{(V)} zydv\right) & \left(I_{zz}=\int_{(V)} zzdv\right) \end{bmatrix}$$

このマトリックスは，例1の断面二次率テンソルと同様に明らかに，対称テンソル(三次元)である．したがって，例1で述べたのと同様なことがこのテンソルについてもいえる．

1.2.10　テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ の不変量(Invariant)

一般に座標系を変換しても，それには無関係に不変な量のことを不変量(invariant)という．したがって，前にも述べた通り，scalarはすべて不変量である．或る量がscalarであるための必要にしてかつ十分な条件は，そのすべての index が dummy index であることである．

非対称テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ の固有方程式は，三次元の場合，

$$\begin{vmatrix} (a^{1}_{\cdot 1}-\lambda) & a^{1}_{\cdot 2} & a^{1}_{\cdot 3} \\ a^{2}_{\cdot 1} & (a^{2}_{\cdot 2}-\lambda) & a^{2}_{\cdot 3} \\ a^{3}_{\cdot 1} & a^{3}_{\cdot 2} & (a^{3}_{\cdot 3}-\lambda) \end{vmatrix}=0 \tag{1.2.38}$$

である．上式を展開して得られる方程式を

$$\lambda^{3}-\sigma\lambda^{2}+\kappa\lambda-\delta=0 \tag{1.2.39}$$

とすれば，固有値 λ の各係数は次のようになる．

$$\sigma=a^{1}_{\cdot 1}+a^{2}_{\cdot 2}+a^{3}_{\cdot 3}=a^{i}_{\cdot i} \tag{1.2.40}$$

$$\kappa=\begin{vmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 2} \\ a^{2}_{\cdot 1} & a^{2}_{\cdot 2} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^{2}_{\cdot 2} & a^{2}_{\cdot 3} \\ a^{3}_{\cdot 2} & a^{3}_{\cdot 3} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 3} \\ a^{3}_{\cdot 2} & a^{3}_{\cdot 3} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(a^{i}_{\cdot i}a^{j}_{\cdot j}-a^{i}_{\cdot j}a^{j}_{\cdot i}) \tag{1.2.41}$$

$$\delta=\begin{vmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 2} & a^{1}_{\cdot 3} \\ a^{2}_{\cdot 1} & a^{2}_{\cdot 2} & a^{2}_{\cdot 3} \\ a^{3}_{\cdot 1} & a^{3}_{\cdot 2} & a^{3}_{\cdot 3} \end{vmatrix}=\det(a^{i}_{\cdot j})=\frac{1}{6}a^{i}_{\cdot l}a^{j}_{\cdot m}a^{k}_{\cdot n}\epsilon_{ijk}\epsilon^{lmn} \tag{1.2.42}$$

ただし，$\epsilon_{ijk}\epsilon^{lmn}$ の意味については，本編第4章において後述する．

しかるに固有値 λ は，1.2.4 節で述べた通り，座標系の変換に無関係に不変でなければならないから，固有方程式(1.2.39)は，座標系の変換に無関係に不変でなければならない．すなわち，(1.2.39)式の λ の各係数は，座標系の変換に無関係に一定でなければならない．実際，上の(1.2.40)式，(1.2.41)式及び(1.2.42)式で見る通りこれらの量の index はすべて dummy index で，これらの量が scalar であることを示している．

しかしながら，ここに注意すべきことは，非対称テンソルの形態が $[a_{ij}]$ ま

たは，$[a^{ij}]$ の形をしている場合でも，固有値は，$[a^{i}_{\cdot j}]$ の場合と同一であり，したがって固有方程式

$$\lambda^3-\sigma\lambda^2+\kappa\lambda-\delta=0 \tag{1.2.43}$$

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=a_{ii}\\&\kappa=\frac{1}{2}(a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ji})\\&\delta=\det(a_{ij})\end{aligned}\right\} \tag{1.2.44}$$

or

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=a^{ii}\\&\kappa=\frac{1}{2}(a^{ii}a^{jj}-a^{ij}a^{ji})\\&\delta=\det(a^{ij})\end{aligned}\right\} \tag{1.2.45}$$

は，$[a^{i}_{\cdot j}]$の場合と同じであって，その係数は座標系の変換に無関係な量，すなわち不変量でなければならないことである．すなわち，index がすべて dummy index でなくても不変量であることがありうるわけである．換言すれば，scalar はすべて，不変量であることはもちろんであるが，逆に，不変量はすべて scalar であるということは，必ずしも成立しないことがわかる．

固有方程式の λ の係数 σ,κ,δ が不変量であることは，実際に座標系の変換を行った場合に，これらの量が不変であることを，計算によって示すこともできる．すなわち，たとえば δ が不変であることを，実際にお目にかけることにしよう．旧座標系の index を i,j で表し，新座標系の index を i',j' で表すことにすれば，テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ について，次のような計算ができる．すなわち，

$$a^{i'}_{\cdot j'}=a^{i}_{\cdot j}\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'},\qquad \beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}\neq\delta^{i'}_{j'}$$

したがって，個々のテンソル成分については，$a^{i'}_{\cdot j'}\neq a^{i}_{\cdot j}$ であるが，テンソル $[a^{i'}_{\cdot j'}]$ 及び $[a^{i}_{\cdot j}\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}]$ の行列式を，それぞれ $|a^{i'}_{\cdot j'}|$ 及び $|a^{i}_{\cdot j}\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}|$ として表すことにすれば，次のようになる．

$$|a^{i'}_{\cdot j'}|=|a^{i}_{\cdot j}\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}|=|a^{i}_{\cdot j}\beta^{i'}_{i}|\cdot|\beta^{j}_{j'}|=|a^{i}_{\cdot j}|\cdot|\beta^{i'}_{i}|\cdot|\beta^{j}_{j'}|=|a^{i}_{\cdot j}|\frac{1}{\varDelta}\cdot\varDelta=|a^{i}_{\cdot j}|$$

ただし，$\varDelta\equiv|\beta^{i'}_{i}|$ とする．

《上記の演算で，$|a^{i}_{\cdot j}\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}|=|a^{i}_{\cdot j}|\cdot|\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}|$ としてはならないことに注意する必要がある．それは，$[\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}]$ が四階のマトリックスであるため，その行列式の定義がなされていないからである．》

上記の σ,κ,δ の組合せによって作られる量もまた，明らかにすべて不変量であるが，これらの組合せによって作られる量が，簡単な形式となる不変量として，次のようなものがある．

$$\sigma^2-\kappa=a^{i}_{\cdot j}a^{j}_{\cdot i} \tag{1.2.46}$$

$$\begin{aligned}2\sigma^2-3\kappa&=3a^{i}_{\cdot j}a^{j}_{\cdot i}-a^{i}_{\cdot i}a^{j}_{\cdot j}\\&=3\left(a^{i}_{\cdot j}-\frac{1}{3}a^{m}_{\cdot m}\delta^{i}_{j}\right)\left(a^{j}_{\cdot i}-\frac{1}{3}a^{m}_{\cdot m}\delta^{j}_{i}\right)\end{aligned} \tag{1.2.47}$$

上記の(1.2.47)式の右辺の括弧の項は，いずれも，テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ を，

$$[a^{i}_{\cdot j}]\equiv\begin{bmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 2} & a^{1}_{\cdot 3} \\ a^{2}_{\cdot 1} & a^{2}_{\cdot 2} & a^{2}_{\cdot 3} \\ a^{3}_{\cdot 1} & a^{3}_{\cdot 2} & a^{3}_{\cdot 3} \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} \frac{1}{3}a^{m}_{\cdot m} & & 0 \\ & \frac{1}{3}a^{m}_{\cdot m} & \\ 0 & & \frac{1}{3}a^{m}_{\cdot m} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \left(a^{1}_{\cdot 1}-\frac{1}{3}a^{m}_{\cdot m}\right) & a^{1}_{\cdot 2} & a^{1}_{\cdot 3} \\ a^{2}_{\cdot 1} & \left(a^{2}_{\cdot 2}-\frac{1}{3}a^{m}_{\cdot m}\right) & a^{2}_{\cdot 3} \\ a^{3}_{\cdot 1} & a^{3}_{\cdot 2} & \left(a^{3}_{\cdot 3}-\frac{1}{3}a^{m}_{\cdot m}\right) \end{bmatrix}$$

のように書き表した場合の第2項であって，これを deviatric tensor とよび，第1項のほうを isotropic tensor とよんでいる．けだし，応力テンソルの場合には，第1項は等方応力に，第2項は偏差応力に相当することに由来する名称である．

1.2.11　二次的固有ベクトル(Secondary eigen vector)及び固有値

一般に，非対称テンソル $[a^{i}_{\cdot j}]$ について，

$$\begin{bmatrix} a^{1}_{\cdot 1} & a^{1}_{\cdot 2} & a^{1}_{\cdot 3} \\ a^{2}_{\cdot 1} & a^{2}_{\cdot 2} & a^{2}_{\cdot 3} \\ a^{3}_{\cdot 1} & a^{3}_{\cdot 2} & a^{3}_{\cdot 3} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} u^{1} \\ u^{2} \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \lambda u^{1} \\ \lambda u^{2} \\ v^{3} \end{Bmatrix} \qquad (1.2.48)$$

なる関係にある．ベクトル $\boldsymbol{u}$ を，二次的固有ベクトル(Secondary eigen vector)といい，この場合，上式(1.2.48)式の右辺にある λ を，二次的固有値という．ただし，上式(1.2.48)におけるベクトル $\boldsymbol{v}$ は，任意のベクトルとする．

(1.2.48)式を，indicial notation で書けば，

$$\left.\begin{aligned} &a^{\alpha}_{\cdot\beta}u^{\beta}+a^{\alpha}_{\cdot 3}0=\lambda u^{\alpha} \qquad (\alpha,\beta=1,2) \\ &a^{3}_{\cdot\beta}u^{\beta}+a^{3}_{\cdot 3}0=v^{3} \end{aligned}\right\}$$

上式で，v^{3} は任意の値であってよいわけであるから，結局，上式は次の形式に帰着する．すなわち，

$$(a^{\alpha}_{\cdot\beta}-\lambda\delta^{\alpha}_{\beta})u^{\beta}=0 \qquad (1.2.49)$$

上式(1.2.49)は，二次元における固有ベクトルの定義式である．したがって，二次的固有方程式は，

$$\det(a^{\alpha}_{\cdot\beta}-\lambda\delta^{\alpha}_{\beta})=0 \qquad (1.2.50)$$

今，テンソル $[a^{\alpha}_{\cdot\beta}]$ が対称テンソル $[a^{\alpha}_{\cdot\beta}]$ である場合には，三次元のときの

所論と同様にして，λ は常に実根であり，必ず直交する2個の二次的固有ベクトルが存在する．

二次的固有値及び固有ベクトルは，光弾性実験において，三次元模型から切取ったスライス板内の二次的主応力に相当するものである．

第1.3章　歪テンソル(Strain tensor)

1.3.1　埋込座標 (Convected coordinates) 及び歪テンソルの定義（その1）

変形する物体を考える場合に，その物体が変形する以前に設定した座標系 a^i を，物体の各分子に永久に固定するものとする．すなわち，物体内の各分子は，変形後においても，同じ座標値 a^i の標識を保有するものとする．このような方法で使用される座標を**埋込座標**とよぶ．

変形前における base vector を $\boldsymbol{g}_i$ とし，metric tensor を g_{ij} とすれば，線素 $d\boldsymbol{s}$ は，

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_i da^i$$

$$\therefore\quad d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s}=g_{ij}da^i da^j \tag{1.3.1}$$

変形後の base vector を，$\hat{\boldsymbol{g}}_i$，metric tensor を $\hat{g}_{ij}$，線素 $d\boldsymbol{s}$ の変形後の線素を $d\hat{\boldsymbol{s}}$ とすれば，

$$d\hat{\boldsymbol{s}}=\hat{\boldsymbol{g}}_i da^i$$

$$\therefore\quad d\hat{\boldsymbol{s}}\cdot d\hat{\boldsymbol{s}}=\hat{g}_{ij}da^i da^j \tag{1.3.2}$$

したがって，変形の割合は，metric tensor の変化で示せるものと考えられる．すなわち，

$$\gamma_{ij}=\hat{g}_{ij}-g_{ij} \tag{1.3.3}$$

$\hat{g}_{ij}$, g_{ij} は共に tensor の成分であるが，それぞれ別の座標系における tensor の成分であるから，γ_{ij} が，同一の変形前の座標系（$\boldsymbol{g}_i$）での tensor 成分として取扱われるものであるか否かは，今のところ不明である．この問題を明らかにするために，すべての量を，座標系 a^i から他の座標系 $a^{i'}$ に変換することを考えてみると，

$$d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_{i'}da^{i'},\qquad d\hat{\boldsymbol{s}}=\hat{\boldsymbol{g}}_{i'}da^{i'}$$

$$\boldsymbol{g}_{i'}=\beta^i_{i'}\boldsymbol{g}_i,\qquad \hat{\boldsymbol{g}}_{i'}=\hat{\beta}^i_{i'}\hat{\boldsymbol{g}}_i=\beta^i_{i'}\hat{\boldsymbol{g}}_i\qquad \left(\because\quad \hat{\beta}^i_{i'}=\frac{\partial a^i}{\partial a^{i'}}=\beta^i_{i'}\right)$$

ゆえに (1.3.3) 式の右辺の二つの項は，いずれも同じ方法で，座標系の変換が行われることがわかる．したがって，

$$\gamma_{i'j'}=\gamma_{ij}\beta^i_{i'}\beta^j_{j'} \tag{1.3.4}$$

上式は，γ_{ij} が，tensor の特性を有することを立証するものである．この九つの成分 γ_{ij} より成る物理的実在量を**歪テンソル**とよぶことにする．これらの γ_{ij}

と，普通工業的に歪とよばれている量との関係については後述することにする．g_{ij} 及び $\hat{g}_{ij}$ は共に symmetric であるから，strain tensor γ_{ij} もまた symmetric である．すなわち，

$$\gamma_{ij}=\gamma_{ji} \tag{1.3.5}$$

(1.3.3)式は，metric tensor の共変成分から歪テンソルを誘導したものであるが，metric tensor の反変成分から，次の量

$$\zeta^{ij}=\hat{g}^{ij}-g^{ij} \tag{1.3.6}$$

を定義すると，これは，次に示すような歪テンソルの反変成分，

$$\gamma^{ij}=\gamma_{kl}g^{ik}g^{jl}=(\hat{g}_{kl}-g_{kl})g^{ik}g^{jl}=\hat{g}_{kl}g^{ik}g^{jl}-g^{ij} \tag{1.3.7}$$

に等しいのではなかろうかと考えられる．ところが，次に示すように，実はそうではない．埋込座標では，物体が変形した場合に，その変形に応じて $\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j$ はそれぞれ $\hat{\boldsymbol{g}}_i, \hat{\boldsymbol{g}}_j$ に変じ，この変形後の座標系で $\hat{\boldsymbol{g}}^j$ は，

$$\hat{\boldsymbol{g}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{g}}^j=\hat{\delta}_i^j=\delta_i^j$$

から定義されるので，次式

$$\hat{g}^{ij}\hat{g}_{jk}=\hat{\delta}_k^i=\delta_k^i \tag{1.3.8}$$

はもちろん成立するはずである(ただし，埋込座標の定義から $da^i=d\hat{a}^i$ であるが，$g_{ij}da^j=da_i$，$\hat{g}_{ij}da^j=d\hat{a}_j$ であるから，$da_i\fallingdotseq d\hat{a}_i$ であることに注意すること)．また ζ^{ij}, γ_{ij} それぞれの共変，混変，及び反変量をそれぞれ，座標系 $(\boldsymbol{g}_i)$ において，通常のテンソルと同様に定義すると，

$$\hat{g}^{ij}\hat{g}_{jk}=(g^{ij}+\zeta^{ij})(g_{jk}+\gamma_{jk})=\delta_k^i+\gamma_k^i+\zeta_k^i+\zeta^{ij}\gamma_{jk}$$

$$\therefore\quad \delta_k^i=\delta_k^i+\gamma_k^i+\zeta_k^i+\zeta^{ij}\gamma_{jk}$$

上式の最後の項 $\zeta^{ij}\gamma_{jk}$ は，歪に関する二次形式のような項であるので，歪が微小な場合，これを省略することにすれば，

$$\zeta_k^i\fallingdotseq-\gamma_k^i$$

$$\therefore\quad \zeta^{ij}\fallingdotseq-\gamma^{ij}$$

$$\therefore\quad \hat{g}^{ij}-g^{ij}\fallingdotseq-\gamma^{ij} \tag{1.3.9}$$

すなわち，ζ^{ij} は γ^{ij} に等しいのではなく，実は $-\gamma^{ij}$ に，ほぼ等しいことがわかる．

物体の変形は，任意の分子点の変形前の位置から，その変形後の位置に至る変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ が既知であれば，完全に記述することができるから，γ_{ij} を，ベクトル $\boldsymbol{u}$ の項で表すことは，可能であろうと考えられる．このようなことをするためには，ベクトル $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}^i u_i$ を微分することが必要であるが，今の段階では，$\boldsymbol{g}^i$ を微分することについては，まだ述べていないので，話を直線座標系(斜交座標系でもよい)に限定することにする．そうすると，base vector は座標系内のいたるところで constant になるから，

$$d\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}^i\frac{\partial u_i}{\partial a^j}da^j=\boldsymbol{g}_i\frac{\partial u^i}{\partial a^j}da^j$$

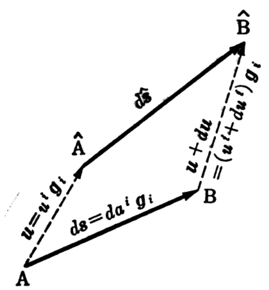
$$\frac{\partial u_i}{\partial a^j}=u_{i,j},\qquad \frac{\partial u^i}{\partial a^j}=u^i{}_{,j}$$

とおけば，

$$d\boldsymbol{u}=\boldsymbol{g}^iu_{i,j}da^j=\boldsymbol{g}_iu^i{}_{,j}da^j \tag{1.3.10}$$

(i, j について summation convention のあることに注意)

上記の $u_{i,j}$ または $u^i{}_{,j}$ がテンソルであるか否かを，(1.3.10) 式は示しているわけではないから，そのことについては，証明を必要とする．後述するように，これらは，そのままの形ではテンソルではないが，共変微分をとって，これを一般化すれば，テンソルである．



第13図　変位と歪 ($\boldsymbol{g}_i$：直線座標系のときは，場所について不変)

さて，第 13 図に示すように，変形前の線素 $d\boldsymbol{s}$ の両端末点A及びBについて考えてみよう．物体の変形に伴って，A点は変位 $\boldsymbol{u}$ の結果，$\hat{\mathrm{A}}$点に移動し，B点は，ほんの少しだけ異なる変位 ($\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$) を経て，$\hat{\mathrm{B}}$点に移動する．第 13 図から容易に次のことがわかる．

$$\boldsymbol{u}+d\hat{\boldsymbol{s}}=d\boldsymbol{s}+\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$$

$$\therefore\quad d\hat{\boldsymbol{s}}=d\boldsymbol{s}+d\boldsymbol{u}=d\boldsymbol{s}+\boldsymbol{g}^iu_{i,j}da^j=d\boldsymbol{s}+\boldsymbol{g}_iu^i{}_{,j}da^j \tag{1.3.11}$$

($\boldsymbol{g}^i, \boldsymbol{g}_i$ は今の場合，座標系内でいたるところ，一定なることに注意)

ゆえに，変形後の線素の 2 乗を，次のように書くことができる．

$$\begin{aligned}d\hat{\boldsymbol{s}}\cdot d\hat{\boldsymbol{s}}&=(\boldsymbol{g}_ida^i+\boldsymbol{g}_ku^k{}_{,i}da^i)(\boldsymbol{g}_jda^j+\boldsymbol{g}_lu^l{}_{,j}da^j)\\ \text{or}\quad&=(\boldsymbol{g}_ida^i+\boldsymbol{g}^ku_{k,i}da^i)(\boldsymbol{g}_jda^j+\boldsymbol{g}^lu_{l,j}da^j)\\ &=(g_{ij}+2\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^lu_{l,j}+g^{kl}u_{k,i}u_{l,j})da^ida^j\\ \text{or}\quad&=(g_{ij}+2\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_lu^l{}_{,j}+g_{kl}u^k{}_{,i}u^l{}_{,j})da^ida^j\end{aligned}$$

(1.3.2)式を左辺に代入して，

$$\begin{aligned}\hat{g}_{ij}da^ida^j&=(g_{ij}+2u_{i,j}+g^{kl}u_{k,i}u_{l,j})da^ida^j\\ \text{or}\quad&=(g_{ij}+2u_{i,j}+g_{kl}u^k{}_{,i}u^l{}_{,j})da^ida^j\\ \therefore\quad\gamma_{ij}da^ida^j&=(2u_{i,j}+g^{kl}u_{k,i}u_{l,j})da^ida^j\\ \text{or}\quad&=(2u_{i,j}+g_{kl}u^k{}_{,i}u^l{}_{,j})da^ida^j\end{aligned}$$

上式において，da^i 及び da^j はそれぞれ summation convention で，線素ベクトル $d\boldsymbol{s}$ の相異なる三つの成分を示すものであるが，線素ベクトル $d\boldsymbol{s}$ は全

く任意のものであるから，まず最初に $d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_1da^1$ に選び，両辺の da^1da^1 の factor が等しいことを確認しておいて，また同様なことを $i=j=2$ 及び$=3$ について実施する．その後の手続きでは，$u_{i,j}\neq u_{j,i}$ であるから，次のようにする．すなわち線素 $d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{g}_1da^1+\boldsymbol{g}_2da^2(da^3=0)$ を選び，両辺で相等しいことが，上記の手続きでわかっている項を消去すれば，

$$\begin{aligned}\gamma_{12}+\gamma_{21}&=2(u_{1,2}+u_{2,1})+g^{kl}(u_{k,1}u_{l,2}+u_{k,2}u_{l,1})\\ \text{or}\quad &=2(u_{1,2}+u_{2,1})+g_{kl}(u^k{}_{,1}u^l{}_{,2}+u^k{}_{,2}u^l{}_{,1})\\ &=2(u_{1,2}+u_{2,1})+(u^l{}_{,1}u_{l,2}+u^k{}_{,1}u_{k,2})\qquad(\because\ g^{kl}=\text{const.})\\ \text{or}\quad &=2(u_{1,2}+u_{2,1})+(u^k{}_{,1}u_{k,2}+u^l{}_{,1}u_{l,2})\qquad(\because\ g_{kl}=\text{const.})\end{aligned}$$

ゆえに上式のいずれをとっても

$$\gamma_{12}+\gamma_{21}=2(u_{1,2}+u_{2,1})+2u^k{}_{,1}u_{k,2}$$

$$\therefore\quad \gamma_{12}=u_{1,2}+u_{2,1}+u^k{}_{,1}u_{k,2}\qquad《\because\ (1.3.5)\text{式により }\gamma_{12}=\gamma_{21}》$$

$da^1=0$ または，$da^2=0$ なる場合の線素について，同様な手続きを行って，一般に次の結果が得られる．

$$\gamma_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}+u^k{}_{,i}u_{k,j}\qquad(i,j=1,2,3)\qquad(1.3.12)$$

上式の右辺の最後の項は，変位微分の二次形式であるから，微小変位の場合に，これを無視することにすれば，上式は次のようになる．

$$\gamma_{ij}\fallingdotseq u_{i,j}+u_{j,i}\qquad(1.3.13)$$

(1.3.12)式及び(1.3.13)式は作用外力及び物体材質の弾性，または非弾性特性に無関係であって，変形前の位置から，変形後の位置に至る物体の変形運動の幾何学的関係にのみ依存するものである．そこでこの関係式を**幾何学的変形関係式**とよぶ．

(1.3.12)，(1.3.13)式は，一般の直線座標系（斜交座標系でもよい）の場合に適用されるものであるが，特にデカルト座標系の場合には，(1.3.13)式は，

$$da^1=da,\qquad da^2=db,\qquad da^3=dc$$

$$u_1=u,\qquad u_2=v,\qquad u_3=w$$

$$\gamma_{11}=2\frac{\partial u}{\partial a},\qquad \gamma_{22}=2\frac{\partial v}{\partial b},\qquad \gamma_{33}=2\frac{\partial w}{\partial c}$$

$$\gamma_{12}=\frac{\partial v}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial b},\qquad \gamma_{23}=\frac{\partial w}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial c},\qquad \gamma_{31}=\frac{\partial u}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial a}$$

したがって，

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_{11}=2\varepsilon_a,\qquad \gamma_{22}=2\varepsilon_b,\qquad \gamma_{33}=2\varepsilon_c\\ &\gamma_{12}=\gamma_{ab},\qquad \gamma_{23}=\gamma_{bc},\qquad \gamma_{31}=\gamma_{ca}\end{aligned}\right\}$$

とおけば通常の応用力学の書物にある歪の公式が得られる．

さらにまた，デカルト座標系の場合に，(1.3.12)式について同様な取扱いを

すれば，

$$\gamma_{11}=2\varepsilon_a=2\frac{\partial u}{\partial a}+\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2$$

$$\gamma_{12}=\gamma_{ab}=\left(\frac{\partial u}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial a}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial a}\cdot\frac{\partial u}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial a}\cdot\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial a}\cdot\frac{\partial w}{\partial b}\right)$$

上式で2倍の係数が出てくるのは，歪の定義として，線素の2乗の変化に基づく定義を採用していることに起因しているが，もし後述のように，線素の元の長さに対する増分長の比(線的歪)で ε_a を定義すれば，2倍の係数はなくなる．今後は歪の measure として，むしろ，次のテンソル，

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\gamma_{ij} \tag{1.3.14}$$

を用いることにする．そのわけは主として，ε_{ij} と stress との dot product が変形の間になされる単位体積当りの仕事量に等しいという理由による．次に，テンソル記号 ε_{ij} で，歪の公式を再録すれば，

微小変位の場合(線形公式)：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{1.3.15}$$

大変形の場合(精密公式)：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u^k{}_{,i}u_{k,j}) \tag{1.3.16}$$

ただし，上式の右辺は直線座標系（斜交座標系でもよい）の場合の公式であるが，テンソル成分の形式ではない．これらを，テンソル形式で表すことについては第 1.10 章で後述する．

1.3.2 剛結枠座標系(Rigid-frame coordinate system)及び歪テンソルの定義(その2)

Base vector が時間に関係なく，物体の変形前のまま，終始空間内で固定した座標系を**剛結枠座標系**とよぶ．剛結枠座標系において，物体内の分子点の原座標（t_0 における座標）(initial coordinates) を**物点座標**（**material coordinates**）とよび，この分子点の時刻 t における空間内の位置の座標を，**空間座標**（**spatial coordinates**）とよぶ．通常，前者を $\boldsymbol{r}_0(a^1, a^2, a^3)$ で表し，後者を $\boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3)$ で表して区別している．そうすると，次の関係がある．

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t-t_0, \boldsymbol{r}_0) \quad \text{i.e.,} \quad r^i=f^i(t-t_0, a^1, a^2, a^3) \tag{1.3.17}$$

ただし，

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{f}(0, \boldsymbol{r}_0) \quad \text{i.e.,} \quad r_0^i=f^i(0, a^1, a^2, a^3) \tag{1.3.18}$$

(1.3.17)式及び(1.3.18)式の逆関係は次のように書ける．

$$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{\varphi}(t-t_0, \boldsymbol{r}) \quad \text{i.e.,} \quad r_0^i=\varphi^i(t-t_0, x^1, x^2, x^3) \tag{1.3.19}$$

ただし，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(0,\boldsymbol{r})$ i.e., $r^i=\varphi^i(0,x^1,x^2,x^3)=f^i(0,x^1,x^2,x^3)$ (1.3.20)

(1.3.17)式は (t,a^1,a^2,a^3) を独立変数とし，また (1.3.19)式は，(t,x^1,x^2,x^3) を独立変数としている．前者を **material description** (または **Lagrangian description**) とよび，後者を **spatial description** (または **Eulerian description**) とよぶ． (1.3.17) 式，すなわち，Lagrangian description は剛結枠座標系内で，或る分子点が時間 $(t-t_0)$ の後に占める終局座標点を，初めの座標点 (a^1,a^2,a^3) を用いて表すものであり，(1.3.19)式すなわち，Eulerian description は，剛結枠座標系内で，或る分子点が現在より時間 $(t-t_0)$ 以前に占めていた初めの座標点を終局(現在)の座標点 (x^1,x^2,x^3) を用いて表すものである．

前節における歪テンソルの定義では，変形前の基底ベクトルを基底ベクトルとする座標系を用いて，(基準を，変形前後のいずれにとるかについては，無関係な)歪 $\gamma_{ij}=(\hat{g}_{ij}-g_{ij})$ の表示を行ったが，剛結枠座標系では，変形前後のいずれか一方の線分素成分を基準として，歪を表示しなければならない．通常，工業上では変形前の線分素成分を基準として歪を表示することにしている．すなわち，歪の Lagrangian description が，普通一般的に行われている．

今の段階では，**直線座標系に話を限定することとし**，(1.3.17)式及び(1.3.19)式において，$(t-t_0)$を或る一定時間の値に固定して考えることにすれば，t を変数として考える必要はなくなるから，(1.3.17)式及び(1.3.19)式は次のように書き直すことができる．

$$x^i=f^i(a^1,a^2,a^3) \quad 及び \quad x_i=g_i(a_1,a_2,a_3) \tag{1.3.21}$$

$$a^i=\varphi^i(x^1,x^2,x^3) \quad 及び \quad a_i=\phi_i(x_1,x_2,x_3) \tag{1.3.22}$$

material description の場合には da^i または da_i が独立変数の増分と考えられ，また spatial description では，dx^i または dx_i が独立変数の増分と考えられるから，

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial a^j}da^j \quad 及び \quad dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial a_j}da_j \tag{1.3.23}$$

$$da^i=\frac{\partial a^i}{\partial x^j}dx^j \quad 及び \quad da_i=\frac{\partial a_i}{\partial x_j}dx_j \tag{1.3.24}$$

変形前の線素$(d\boldsymbol{s})$の長さの2乗は，

$$d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s}=da^ida_jg_i^j=da^ida_j\delta_i^j=da^ida_i \tag{1.3.25}$$

または，変形後の線素$(d\hat{\boldsymbol{s}})$の長さの2乗は，

$$d\hat{\boldsymbol{s}}\cdot d\hat{\boldsymbol{s}}=dx^idx_j\hat{g}_i^j=dx^idx_j\delta_i^j=dx^idx_i \tag{1.3.26}$$

今，material description での歪成分 ε_j^k 及び spatial description での歪成分 η_j^k をそれぞれ，次のように定義する．

$$dx^idx_i-da^ida_i=2\varepsilon_j^kda^jda_k \tag{1.3.27}$$

$$dx^idx_i-da^ida_i=2\eta_j^kdx^jdx_k \tag{1.3.28}$$

(1.3.23)式を(1.3.27)式に代入し，かつ $u^i=x^i-a^i, u_i=x_i-a_i$ すなわち，$x^i=u^i+a^i, x_i=u_i+a_i$《ただし，$\boldsymbol{u}$ は分子点 $\boldsymbol{a}$ の変位ベクトルとする》を適用すれば，

$$\varepsilon^k_j=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^j}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial a_k}-\delta^i_j\delta^k_i\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\delta^i_j+\frac{\partial u^i}{\partial a^j}\right)\left(\delta^k_i+\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\right)-\delta^i_j\delta^k_i\right\} \quad \text{(A)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^k}{\partial a^j}+\frac{\partial u_j}{\partial a_k}+\frac{\partial u^i}{\partial a^j}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\right)$$

ここで，

$$\frac{\partial u^k}{\partial a^j}=u^k{}_{,j}, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial a_k}=u_{j,}{}^k \tag{1.3.29}$$

のように表すことにすれば，上式は，

$$\varepsilon^k_j=\frac{1}{2}(u^k{}_{,j}+u_{j,}{}^k+u^i{}_{,j}u_{i,}{}^k) \tag{1.3.30}$$

となる．同様に(1.3.24)式を，(1.3.28)式に代入し，$a^i=x^i-u^i, a_i=x_i-u_i$ を適用すれば，

$$\eta^k_j=\frac{1}{2}\left(\delta^i_j\delta^k_i-\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)=\frac{1}{2}\left\{\delta^i_j\delta^k_i-\left(\delta^i_j-\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\right)\left(\delta^k_i-\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\right\} \quad \text{(B)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_k}-\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^j}=u^k{}_{,j}, \qquad \frac{\partial u_j}{\partial x_k}=u_{j,}{}^k$$

とおいて，

$$\eta^k_j=\frac{1}{2}(u^k{}_{,j}+u_{j,}{}^k-u^i{}_{,j}u_{i,}{}^k) \tag{1.3.31}$$

直線座標系では，metric tensor の成分 g_{ij}, g^{ij} はいたるところ一定であるから，(1.3.30)式及び(1.3.31)式から，次式が得られる．

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^k_j g_{ik}=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+\frac{\partial u_j}{\partial a_k}g_{ik}+u^l{}_{,j}\cdot\frac{\partial u_l}{\partial a_k}g_{ik}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(u_{i,j}+\frac{\partial u_j}{\partial a_k}\frac{g_{ik}}{g_{ik}g^{ik}}+u^l{}_{,j}\frac{\partial u_l}{\partial a_k}\cdot\frac{g_{ik}}{g_{ik}g^{ik}}\right) \qquad (\because\ g_{ik}g^{ik}=1)$$

$$=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u^l{}_{,j}u_{l,i})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial a^j}+\frac{\partial u_j}{\partial a^i}+\frac{\partial u^l}{\partial a^j}\cdot\frac{\partial u_l}{\partial a^i}\right) \tag{1.3.32}$$

$$\eta_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}-u^l{}_{,j}u_{l,i})=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^i}-\frac{\partial u^l}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial u_l}{\partial x^i}\right) \tag{1.3.33}$$

上の(1.3.32)式での微分は a^i（または a^j）を変数とする微分を示し，また(1.3.33)式における微分は x^i（または x^j）を変数とする微分を示す．(1.3.32)式は，前節に得られた結果，(1.3.16)式と一致するが，(1.3.33)式は，前節に得られた結果と異なる．

一般に，

$$\frac{\partial x^i}{\partial a^m}\cdot\frac{\partial a^m}{\partial x^j}=\delta^i_j, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial x_k}=\delta^k_i$$

したがって，前記の(B)式から，

$$\eta^k_j=\frac{1}{2}\left(\delta^i_j\delta^k_i-\frac{\partial a^i}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^m}\cdot\frac{\partial a^m}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial x_k}-\delta^i_m\delta^n_i\frac{\partial a^m}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial x_k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^i}{\partial a^m}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial a_n}-\delta^i_m\delta^n_i\right)\frac{\partial a^m}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial x_k}$$

$$=\varepsilon^n_m\cdot\frac{\partial a^m}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial x_k}$$

$$\therefore\quad \eta_{ij}=\eta^k_j g_{ik}=\varepsilon^n_m\cdot\frac{\partial a^m}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial x_k}\cdot\frac{g_{ik}}{g_{ik}g^{ik}}=\varepsilon^n_m\cdot\frac{\partial a^m}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial x^i}=\varepsilon_{mn}\frac{\partial a^m}{\partial a^j}\frac{\partial a^n}{\partial x^i}$$

$$\text{i.e.,}\qquad \eta_{ij}=\varepsilon_{mn}\frac{\partial a^m}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial a^n}{\partial x^j}\tag{1.3.34}$$

同様にして，

$$\varepsilon_{ij}=\eta_{mn}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial a^i}\cdot\frac{\partial x^n}{\partial a^j}\tag{1.3.35}$$

なる関係のあることがわかる．したがって，二つの description のうちの一方の description で歪成分が，或る分子点において，すべて0であるならば，他方の descriptionでの歪成分もまた，その分子点において，明らかにすべて0である．歪成分がすべて0であるような領域での変位は，仮にそれが存在する場合でも，それは剛体変位だけであることがわかる．

上記のように定義された歪テンソルは，十分小さな変位勾配 (displacement gradients) $\partial u^i/\partial x^j$ の場合には，古典力学での微小歪テンソルに一次項まで一致するが，大変形の場合には一致しない．大変形の場合には，他のテンソル形式，たとえば **Green の変形テンソル(deformation tensor)**，

$$C_{ij}=\frac{\partial x^m}{\partial a^i}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial a^j}=\left(\frac{\partial x^m}{\partial a^i}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial a^j}-g_{ij}\right)+g_{ij}$$

$$=\left(\frac{\partial x^m}{\partial a^i}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial a_k g^{jk}}-\delta^m_i\delta^k_m g_{jk}\right)+g_{ij}$$

$$=\left(\frac{\partial x^m}{\partial a^i}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial a_k}\cdot\frac{g_{jk}}{g^{jk}g_{jk}}-\delta^m_i\delta^k_m g_{jk}\right)+g_{ij}$$

$$=\left(\frac{\partial x^m}{\partial a^i}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial a_k}\cdot g_{jk}-\delta^m_i\delta^k_m g_{jk}\right)+g_{ij}$$

$$=\left(\frac{\partial x^m}{\partial a^i}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial a_k}-\delta^m_i\delta^k_m\right)g_{jk}+g_{ij}\qquad \text{《(A)式参照》}$$

$$=2\varepsilon^k_i g_{jk}+g_{ij}=g_{ij}+2\varepsilon_{ij}\tag{1.3.36}$$

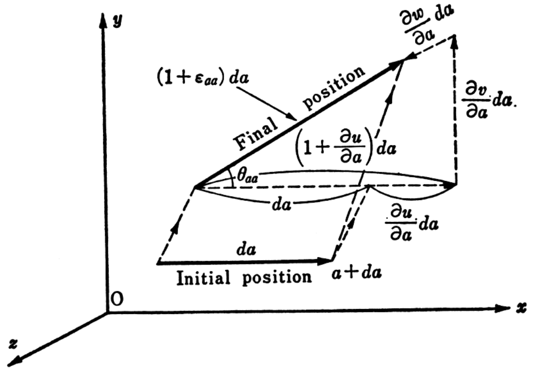
または **Cauchy の変形テンソル**，

$$c_{ij}=\frac{\partial a^m}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial a_m}{\partial x^j}=g_{ij}-2\eta_{ij}\tag{1.3.37}$$

などを用いて記述したほうがはるかに，式の単純化に役立つことが多い．

1.3.3 剛結枠座標系における歪テンソルの定義（その3）

前2節では，歪テンソルを，変形前後における線素の長さの2乗の差によって定義したが，**本節では，デカルト座標系について，**古典力学で行われてきたように，縦歪成分を変形前後における線素の長さの差によって定義し，剪断歪成分を変形前後における直角変化によって定義する．



第14図 古典力学における縦歪成分の Lagrangian description

すなわち，Lagrangian description での縦歪を，一般に次式，

$$\varepsilon^{\mathrm{L}}=\frac{l_f-l_i}{l_i} \tag{1.3.38}$$

ただし，上式における添字はベクトル記号における index ではなく，単に，

ε^{L} : Lagrangian description での縦歪
l_f : 変形後における線素の長さ (final length)
l_i : 変形前の線素の長さ (initial length)

を示すものとする．

によって定義し，さらに縦歪成分を次のように定義する．

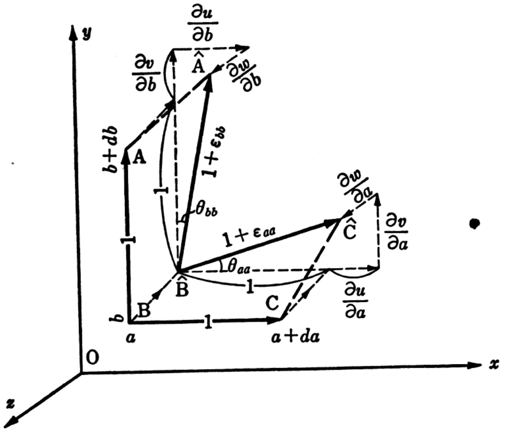
$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon^{\mathrm{L}}_{aa}&=\sqrt{\left(1+\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2}-1\\
\varepsilon^{\mathrm{L}}_{bb}&=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)^2+\left(1+\frac{\partial v}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)^2}-1\\
\varepsilon^{\mathrm{L}}_{cc}&=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)^2+\left(1+\frac{\partial w}{\partial c}\right)^2}-1
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.39}$$

上式は，根号内を2項定理によって無限級数に展開し，次数によって整理すれば次のようになる．

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\mathrm{L}}_{aa}=&\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2\right\}\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial a}\right)^2\right\}+\cdots
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{bb}^{L}&=\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)^2\right\}\\&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)^2\right\}+\cdots\\\varepsilon_{cc}^{L}&=\left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)^2\right\}\\&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial c}\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial c}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)^2\right\}+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(1.3.40)$$

ただし，(a,b,c)：分子点の material coordinates (initial coordinates)
(u,v,w)：分子点の変位ベクトル



第15図　古典力学における剪断歪成分の Lagrangian description

次に，Lagrangian description での剪断歪成分を次のように定義する．

$$\gamma_{ab}^{L}=\theta_{aa}+\theta_{bb}=90^\circ-\angle\hat{A}\hat{B}\hat{C}\quad(1.3.41)$$
$$\gamma_{bc}^{L}=\theta_{bb}+\theta_{cc}$$
$$\gamma_{ca}^{L}=\theta_{cc}+\theta_{aa}$$

$$\sin\gamma_{ab}^{L}=\sin(90^\circ-\angle\hat{A}\hat{B}\hat{C})=\cos(\angle\hat{A}\hat{B}\hat{C})=ll'+mm'+nn'$$

(ただし，l,m,n：線分 $\hat{B}\hat{C}$ の方向余弦
l',m',n'：線分 $\hat{B}\hat{A}$ の方向余弦)

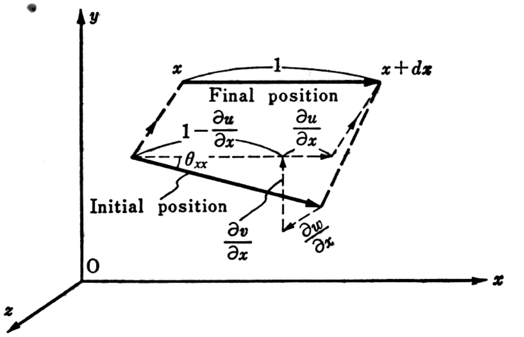
$$=\frac{\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial a}\right)}{(1+\varepsilon_{aa})}\cdot\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial b}\right)}{(1+\varepsilon_{bb})}+\frac{\left(\dfrac{\partial v}{\partial a}\right)}{(1+\varepsilon_{aa})}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{\partial v}{\partial b}\right)}{(1+\varepsilon_{bb})}$$
$$+\frac{\left(\dfrac{\partial w}{\partial a}\right)}{(1+\varepsilon_{aa})}\cdot\frac{\left(\dfrac{\partial w}{\partial b}\right)}{(1+\varepsilon_{bb})}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&=\frac{\left(\dfrac{\partial v}{\partial a}+\dfrac{\partial u}{\partial b}\right)+\left(\dfrac{\partial u}{\partial a}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial b}\right)+\left(\dfrac{\partial v}{\partial a}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial b}\right)+\left(\dfrac{\partial w}{\partial a}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial b}\right)}{(1+\varepsilon_{aa})(1+\varepsilon_{bb})}\\
&\text{同様にして,}\\
&\sin\gamma_{bc}^{\mathrm{L}}=\frac{\left(\dfrac{\partial w}{\partial b}+\dfrac{\partial v}{\partial c}\right)+\left(\dfrac{\partial u}{\partial b}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial c}\right)+\left(\dfrac{\partial v}{\partial b}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial c}\right)+\left(\dfrac{\partial w}{\partial b}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial c}\right)}{(1+\varepsilon_{bb})(1+\varepsilon_{cc})}\\
&\sin\gamma_{ca}^{\mathrm{L}}=\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial c}+\dfrac{\partial w}{\partial a}\right)+\left(\dfrac{\partial u}{\partial c}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial a}\right)+\left(\dfrac{\partial v}{\partial c}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial a}\right)+\left(\dfrac{\partial w}{\partial c}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial a}\right)}{(1+\varepsilon_{cc})(1+\varepsilon_{aa})}
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.3.42}
$$

上式及び(1.3.40)式から一般に,

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u^{k}{}_{,i}u_{k,j})+\cdots \tag{1.3.43}$$

と書くことができる．ただし，ε^{L} は Lagrangian description を示し，この場合の微分はすべて， material coordinates による微分とする．



第16図　古典力学における縦歪成分の Eulerian description

さらに，Eulerian description での縦歪を一般に，次式，

$$\varepsilon^{\mathrm{E}}=\frac{l_f-l_i}{l_f}$$

ただし，上式における添字は，ベクトル記号における index ではなく，単に，

ε^{E} : Eulerian description での縦歪
l_f : 変形後における線素の長さ (final length)
l_i : 変形前の線素の長さ (initial length)

を示すものとする

によって定義し，縦歪成分を次のように定義する．

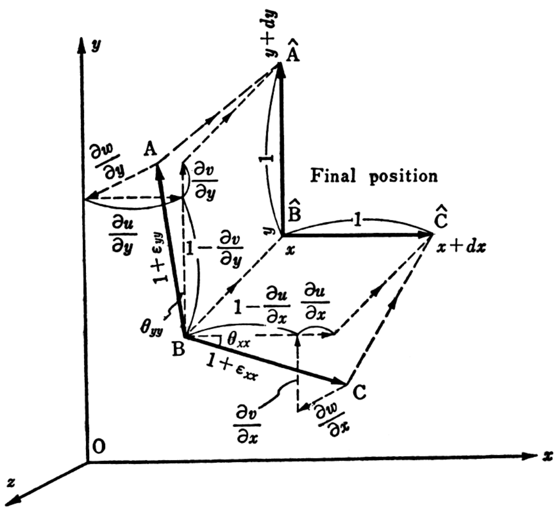
$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{\mathrm{E}}&=1-\sqrt{\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}\\
\varepsilon_{yy}^{\mathrm{E}}&=1-\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(1-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}\\
\varepsilon_{zz}^{\mathrm{E}}&=1-\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(1-\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2}
\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.44)$$

ただし，(x, y, z)：分子点の spatial coordinates (final coordinates)

(u, v, w)：分子点の変位ベクトル

上式の根号内を二項定理によって展開し，次数によって整理すれば，次式を得る．

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}^{\mathrm{E}}&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}+\cdots\\
\varepsilon_{yy}^{\mathrm{E}}&=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}+\cdots\\
\varepsilon_{zz}^{\mathrm{E}}&=\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\}+\cdots
\end{aligned}\right\}\qquad(1.3.45)$$



第17図　古典力学における剪断歪成分の Eulerian description

次に，Eulerian description での剪断歪成分を，次のように定義する．

$$\gamma^{\mathrm{E}}_{xy}=\theta_{xx}+\theta_{yy}=\angle\mathrm{ABC}-90^\circ \qquad (1.3.46)$$
$$\gamma^{\mathrm{E}}_{yz}=\theta_{yy}+\theta_{zz}$$
$$\gamma^{\mathrm{E}}_{zx}=\theta_{zz}+\theta_{xx}$$

$$\sin\gamma^{\mathrm{E}}_{xy}=\sin(\theta_{xx}+\theta_{yy})=\sin(\angle\mathrm{ABC}-90^\circ)=-\cos(\angle\mathrm{ABC})$$
$$=-(ll'+mm'+nn')$$

（ただし，l, m, n：線分 BC の方向余弦
　　　　　l', m', n'：線分 BA の方向余弦）

$$=-\left\{\frac{\left(1-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{1-\varepsilon_{xx}}\cdot\frac{\left(-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)}{1-\varepsilon_{yy}}+\frac{\left(-\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{1-\varepsilon_{xx}}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)}{1-\varepsilon_{yy}}\right.$$
$$\left.+\frac{\left(-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)}{1-\varepsilon_{xx}}\cdot\frac{\left(-\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)}{1-\varepsilon_{yy}}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\therefore\quad \sin\gamma^{\mathrm{E}}_{xy}&=\frac{\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)-\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)-\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)}{(1-\varepsilon_{xx})(1-\varepsilon_{yy})}\\
\sin\gamma^{\mathrm{E}}_{yz}&=\frac{\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)-\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)-\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)-\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)}{(1-\varepsilon_{yy})(1-\varepsilon_{zz})}\\
\sin\gamma^{\mathrm{E}}_{zx}&=\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)-\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)-\left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)}{(1-\varepsilon_{zz})(1-\varepsilon_{xx})}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.47)$$

上式及び(1.3.45)式から一般に，

$$\varepsilon^{\mathrm{E}}_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}-u^{k}{}_{,i}u_{k,j})+\cdots \qquad (1.3.48)$$

と書くことができる．ただし，ε^{E} は，Eulerian description を示し，この場合の微分はすべて，spatial coordinates による微分とする．(1.3.40)式，(1.3.42)式，及び(1.3.45)式，(1.3.47)式において，1次項のみをとれば，初等工業力学の式に一致する．しかし，これらの式で，二次以下の項も採用すれば，前2節の結果とも相違している．

次に，変位勾配テンソル*の Eulerian description と Lagrangian description の相互間の変換関係について，考えてみよう．(x, y, z), (a, b, c) と (u, v, w) との間には，次の関係がある（ただし，デカルト座標系であることに注意）．

* (1.3.50)式または(1.3.51)式の左辺のようなテンソルを変位勾配テンソルという．

$$\left.\begin{array}{l} x-a=u \\ y-b=v \\ z-c=w \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a=x-u \\ b=y-v \\ c=z-w \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x=u+a \\ y=v+b \\ z=w+c \end{array}\right\} \tag{1.3.49}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial c}\cdot\frac{\partial c}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial a}\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial b}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial c}\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

同様にして,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial a}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial b}\left(1-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial c}\left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial a}\left(-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial u}{\partial b}\left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial u}{\partial c}\left(1-\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial u}{\partial c} \\ \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial c} \\ \frac{\partial w}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(-\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(1-\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right) & \left(1-\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial u}{\partial c} \\ \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial c} \\ \frac{\partial w}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(-\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(1-\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right) & \left(1-\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta} \tag{1.3.50}$$

ただし,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(-\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(1-\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right) & \left(1-\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{vmatrix}$$

A_{ij}：上の行列式内で i 行 j 列の余因子(±の符号を含むもの)とする.

同様にして，次の関係式が得られる.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial u}{\partial c} \\ \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial c} \\ \frac{\partial w}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left(1+\frac{\partial u}{\partial a}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right) & \left(1+\frac{\partial v}{\partial b}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right) & \left(1+\frac{\partial w}{\partial c}\right) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial u}{\partial c} \\ \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial c} \\ \frac{\partial w}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} & A'_{31} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{32} \\ A'_{13} & A'_{23} & A'_{33} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta'} \tag{1.3.51}$$

ただし，
$$\Delta' = \begin{vmatrix} \left(1+\frac{\partial u}{\partial a}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right) & \left(1+\frac{\partial v}{\partial b}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right) & \left(1+\frac{\partial w}{\partial c}\right) \end{vmatrix}$$

A'_{ij}：上の行列式内で，i 行 j 列の因子の余因子（±の符号を含むもの）とする．

あるいは，$\left[\frac{\partial x^i}{\partial a^j}\right]$ と $\left[\frac{\partial a^j}{\partial x^i}\right]$ とが互いに逆行列の関係にあるから

$$\begin{bmatrix} \left(1+\frac{\partial u}{\partial a}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right) & \left(\frac{\partial u}{\partial c}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right) & \left(1+\frac{\partial v}{\partial b}\right) & \left(\frac{\partial v}{\partial c}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial a}\right) & \left(\frac{\partial w}{\partial b}\right) & \left(1+\frac{\partial w}{\partial c}\right) \end{bmatrix} \text{ と } \begin{bmatrix} \left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \left(-\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \left(1-\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right) & \left(1-\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix}$$

とが互いに逆行列の関係にあることを利用しても，同じ結果が得られる．なお上記の記述はすべてデカルト座標系について述べた．これをさらに一般の座標系に拡張することについては，第1.8.4節で後述するが，必ずしも容易ではない．

第1.4章　交叉乗積または外積(Cross product, Vector product or Outer product)

前章では，歪について学習したが，その次の段階として応力について学習しなければならない．応力は或る面積素片に作用する力であるから，応力を学習するためには，その予備的段階として，面積素片が，どのようなテンソル形態で表されるかについて学んでおく必要がある．

1.4.1　交代テンソル(Permutation tensor)

交代記号 $e_{ijk}=e^{ijk}$ を，次の規則によって定義する．すなわち，

$i, j, k=1,2,3$ またはこの順序での偶順列である場合(すなわち，2,3,1 または 3,1,2 なる場合)：$e_{ijk}=+1$

i, j, k が 1,2,3 の奇順列である場合(すなわち，3,2,1 または，1,3,2 である場合)：$e_{ijk}=-1$

二つの下付添字または三つの下付添字のすべてが相等しい場合（たとえば，1,1,3 または 2,3,2 のような場合)：$e_{ijk}=0$

上記のような i, j, k の連環順序をそれぞれ cyclic, anticyclic 及び acyclic とよぶ．交代記号は index を3個もっているので，交代記号のすべてを，マトリックス形に配置すれば，立体マトリックスとなる．したがって連環順序は全部で 27 個あるが，そのうち，6個(順列の数)だけが0でないものである．

交代記号は三次の行列式を展開する場合に使われる．今，行列式

$$\det a=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} \tag{1.4.1}$$

について，行列式の定義から，次式が得られる．

$$\det a=a_1^i a_2^j a_3^k e_{ijk}\left(=a_2^f a_1^g a_3^h e^{213} e_{fgh}\right) \tag{1.4.2}$$

$$\text{or}\quad \det a=a_l^1 a_m^2 a_n^3 e^{lmn} \tag{1.4.3}$$

(1.4.2)式で行列式の列の順序を(1,2,3)から(l, m, n)に変えると，e_{lmn} によって表される符号だけ(det a)の符号が変るから，

$$(\det a)\cdot e_{lmn}=a_l^i a_m^j a_n^k e_{ijk} \tag{1.4.4 a}$$

$$6(\det a)=(\det a) e_{lmn} e^{lmn}=a_l^i a_m^j a_n^k e^{lmn} e_{ijk} \tag{1.4.4 b}$$

同様に，

$$(\det a)\cdot e^{ijk}=a_l^i a_m^j a_n^k e^{lmn} \tag{1.4.4 c}$$

$$6(\det a)=(\det a) e^{ijk} e_{ijk}=a_l^i a_m^j a_n^k e^{lmn} e_{ijk} \tag{1.4.4 d}$$

(1.4.1)式の行及び列を置換えて，次のような形の行列式を作った場合，

$$\det A=\begin{vmatrix} a_r^o & a_s^o & a_t^o \\ a_r^p & a_s^p & a_t^p \\ a_r^q & a_s^q & a_t^q \end{vmatrix} \tag{1.4.5}$$

上式は，$(o,p,q)=(r,s,t)=(1,2,3)$である場合には，明らかに$\det A=\det a$であって，また，(o,p,q)及び(r,s,t)の連環順序が$(1,2,3)$と異なる場合には，$(1,2,3)$の順序を入れ換えて(o,p,q)及び(r,s,t)のそれぞれの順序に到達するときの入れ換え回数だけ，$(\det a)$の符号を変化させたものとなる《これはまた，(o,p,q)及び(r,s,t)のそれぞれの順序を入れ換えて$(1,2,3)$の順序に到達するときの入れ換え回数に等しい》．したがって次の関係式が成立することがわかる．

$$\det A=(\det a)e^{opq}e_{rst} \tag{1.4.6 a}$$

$$\det a=(\det A)e_{opq}e^{rst} \tag{1.4.6 b}$$

(N.B. : not summation convention for (o,p,q) and (r,s,t))

同様な考察から，次の行列式についても，上述の場合と同様に，次の関係式が成立する．

$$\left.\begin{aligned} &\det B=|a^{pq}|=a^{i1}a^{j2}a^{k3}e_{ijk}=a^{1l}a^{2m}a^{3n}e_{lmn} \\ &(\det B)e^{lmn}=a^{il}a^{jm}a^{kn}e_{ijk} \\ &\det C=|a_{pq}|=a_{i1}a_{j2}a_{k3}e^{ijk}=a_{1l}a_{2m}a_{3n}e^{lmn} \\ &(\det C)e_{lmn}=a_{il}a_{jm}a_{kn}e^{ijk} \end{aligned}\right\} \tag{1.4.4 e}$$

(1.4.2)式及び(1.4.4 a)式を応用すれば，容易に次の定理を証明することができる．すなわち，“正方マトリックスA及びBの積，Cの行列式は，Aの行列式と，Bの行列式との積に等しい”．

簡単のために3×3のマトリックスについて証明するが，さらに次数の高いマトリックス，またはより次数の低いマトリックスに対する拡張は，適当な数を追加した指標の交代記号を導入することによって，容易に証明することができる．

今，$A=[a_i{}^j]$, $B=[b_j{}^k]$とし，それらの積$C=[a_i{}^j]\cdot[b_j{}^k]$とすれば，$C$は因子として，$c_i{}^k=a_i{}^j b_j{}^k$* を有する．

A及びBの行列式は，

---

* 　$a_j^{\cdot i}b_k^{\cdot j}=c^{\cdot i\cdot\cdot}_{\cdot\cdot k\cdot}=c^{i}_{\cdot k}$,　　$a_i^{\cdot j}b^{k}_{\cdot j}=c_{i\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot k\cdot}=c_i^{\cdot k}$

$a^{j}_{\cdot i}b^{k}_{\cdot j}=c^{\cdot\cdot k\cdot}_{\cdot i\cdot\cdot}=c_i^{\cdot k}$,　　$a^{i}_{\cdot j}b_k^{\cdot j}=c^{i\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot k\cdot}=c^{i}_{\cdot k}$　　etc.

であるが，上式はまた，次のように表すこともできる．

$b_k^{\cdot j}a_j^{\cdot i}=d_{k\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot i}=d_k^{\cdot i}$,　　$b^{k}_{\cdot j}a_i^{\cdot j}=d^{k\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot i\cdot}=d^{k}_{\cdot i}$

$b^{k}_{\cdot j}a^{j}_{\cdot i}=d^{k\cdot\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\cdot i}=d^{k}_{\cdot i}$,　　$b_k^{\cdot j}a^{i}_{\cdot j}=d_{k\cdot\cdot\cdot}^{\cdot\cdot i\cdot}=d_k^{\cdot i}$　　etc.

$$\det A = a_1^{\cdot l} a_2^{\cdot m} a_3^{\cdot n} e_{lmn}$$

$$(\det B) e_{lmn} = b_l^{\cdot i} b_m^{\cdot j} b_n^{\cdot k} e_{ijk}$$

$$\therefore \quad (\det A)(\det B) = a_1^{\cdot l} a_2^{\cdot m} a_3^{\cdot n} e_{lmn} (\det B)$$

$$= a_1^{\cdot l} a_2^{\cdot m} a_3^{\cdot n} (b_l^{\cdot i} b_m^{\cdot j} b_n^{\cdot k} e_{ijk})$$

$$= c_1^{\cdot i} c_2^{\cdot j} c_3^{\cdot k} e_{ijk} = \det C \qquad (1.4.7)$$

前に述べたように，座標系変換係数マトリックス$[\beta^i_{i'}]$及び$[\beta^{j'}_j]$は互いに逆行列の関係にあるから，上の定理によって，それらで作られる行列式は互いに逆数の関係にある．すなわち，

$$|\beta^i_{i'}| = \Delta \quad \text{とおけば，} \quad |\beta^{j'}_j| = \frac{1}{\Delta} \qquad (1.4.8)$$

同様に，metric tensor の九つの成分 g_{ij} を，正方マトリックスの形に並べ，その行列式，

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \qquad (1.4.9)$$

(N.B.：この値は，右手座標系を単に左手座標系に変えても，その値は変らない)

を作ると，(1.1.12)式から，次のことがわかる．

$$|g_{ij} g^{jk}| = |\delta^k_i| = 1$$

$$\therefore \quad |g_{ij}| \cdot |g^{jk}| = 1$$

すなわち，テンソル$[g_{ij}]$と$[g^{jk}]$とは，互いに逆行列の関係にある．したがって(1.4.9)式から，

$$|g^{jk}| = \frac{1}{g} \qquad (1.4.10)$$

また，(1.4.7)式を反復適用して，次の関係式を得る．

$$g' = |g_{i'j'}| = |g_{ij} \beta^i_{i'}| \cdot |\beta^j_{j'}| = |g_{ij}| \cdot |\beta^i_{i'}| \cdot |\beta^j_{j'}| = g \cdot \Delta \cdot \Delta \qquad (1.4.11)$$

今，一時，座標系 (i') をデカルト座標系とすれば，$g' =$ ~~$|\delta_{i'j'}|$~~ $= 1$ であるから，上式から，g は，どのような座標系の場合にも常に，$g > 0$ であることがわかる．したがって上式から，一般に，

$$\sqrt{g'} = \pm \Delta \sqrt{g} \qquad (1.4.12)$$

後(本章4節)でわかるように，一般に $\Delta = |\beta^i_{i'}|$ は，右手座標系同士(または，左手座標系同士)の間では(+)，一方が右手座標系で，他方が左手座標系の場合には(−)の符号を有するから，(1.4.12)式の(±)符号はそれぞれ，同系統座標系同士及び逆系統座標系同士に対応するものである．(1.4.12)式は，行列式 g を一つの座標系から他の座標系に変換する場合の変換式である．

g はスカラー(0階のテンソル)であるが，二つの座標系において同じではな

い．このような変換を受ける量$(\sqrt{g})$を，**重さ1の密度(density)**といい，**凝似スカラー(pseudo scalar)**とよんでいる．(1.4.12)式のような式に現れる変換係数行列式$\varDelta$(または，それに±の符号をつけたもの)の次数に応じて，色々な重さの凝似スカラーが存在する．われわれは時折，このような凝似スカラーに遭遇するが，これらは理論を複雑にするだけで，あまり利益になることはないから，本書では，できる限り，凝似スカラーを避けることにした．

特に座標系(i')及び(i)が共にデカルト座標系の場合には，座標系(i)に対して座標系(i')の座標軸の方向係数をそれぞれ，(l, m, n)，(l', m', n')，(l'', m'', n'')とすれば，この場合，変換係数$\beta^{i}_{i'}$の行列式$\varDelta'$は，

$$\varDelta' = |\beta^{i}_{i'}| = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{1.4.13}$$

ただし，上式の(±)の符号はそれぞれ，右手座標系同士，または左手座標系同士の場合，及び一方と他方とが逆系統座標系の場合に対応するものとする．

以上のところまでは，交代記号e_{ijk}には，どのような座標系も取り付けていなかった．今，デカルト座標系$(i'j'k')$に，交代記号e_{ijk}を取り付けて，

$$e_{i'j'k'} = \epsilon_{i'j'k'}$$

と書くことにし，この量をテンソル成分として，デカルト座標系(i')から他の座標系(i)に変換するものとしたとき，どのような結果が生ずるかについて考えてみよう．

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{i'j'k'}\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}\beta^{k'}_{k} = e_{i'j'k'}\beta^{i'}_{i}\beta^{j'}_{j}\beta^{k'}_{k} \tag{1.4.14}$$

すなわち，上式の右辺は，(1.4.2)式によって，$(i, j, k) = (1, 2, 3)$の場合，行列式$(1/\varDelta)$の展開式である《ただし，$\varDelta = \det(\beta^{i}_{i'})$とする》．デカルト座標系では，$g' = |\delta_{i'j'}| = 1$であるから，(1.4.12)式から，次の関係のあることがわかる．すなわち，

$$\frac{1}{\varDelta} = \pm\sqrt{g} \tag{1.4.15}$$

ただし，$(i'\,j'\,k')$は元のデカルト座標系を示し，$(i\,j\,k)$は，任意の新座標系を示すものとし，$\varDelta = \det(\beta^{i}_{i'})$とする．

したがって，(1.4.14)及び(1.4.15)の両式から，次の関係式の成立することがわかる．

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{\varDelta}e_{ijk} = \pm\sqrt{g}\,e_{ijk} \tag{1.4.16}$$

ただし，ϵ_{ijk}及び$e_{i'j'k'}$の符号の規約は，座標系$(i\,j\,k)$及び$(i'\,j'\,k')$がそれぞれ右手系または左手系であるかにかかわりなく，それぞれ本節の当初に定めた通りとし，また，上式の(±)符号は，元のデカルト座標系$(i'\,j'\,k')$と，任意

の新座標系$(i\,j\,k)$とが，共に同系統座標系であれば(+)符号をとり，もし，逆系統座標系であれば(−)符号をとるものとする．なおこの式の ϵ_{ijk} 及び $e_{i'j'k'}$ はそれぞれ，テンソルの**個々の成分**であることに注意する必要がある．

ϵ_{ijk} なる量は，テンソルの座標系変換法則によって導かれ，定義された量であるから，三階三次のテンソルの共変成分である．したがって metric tensor g^{ij} を用いて，他の variance の成分を作ることができる．そのうち，しばしば使用される1組のテンソルは，triple-contravariant の組，

$$\epsilon^{lmn}=\epsilon_{ijk}g^{li}g^{jm}g^{kn} \tag{1.4.17}$$

である． 上記のテンソル成分の数値を見いだすために，g^{ij} の行列式から出発し，(1.4.4 e)の展開公式を適用する．

$$\frac{1}{g}e^{lmn}=\begin{vmatrix} g^{l1} & g^{l2} & g^{l3} \\ g^{m1} & g^{m2} & g^{m3} \\ g^{n1} & g^{n2} & g^{n3} \end{vmatrix}=g^{li}g^{mj}g^{nk}e_{ijk}$$

$$=g^{li}g^{mj}g^{nk}\cdot\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon_{ijk}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot g^{li}g^{mj}g^{nk}\epsilon_{ijk}=\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{lmn}$$

$$\therefore\quad \epsilon^{lmn}=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{lmn} \tag{1.4.18}$$

すなわち，ϵ^{lmn} は(l, m, n)の連環順序が cyclic であるか，anticyclic であるか，または acyclic であるかによって，それぞれ $+1/\sqrt{g}$，$-1/\sqrt{g}$，または0の値を有する．

(1.4.16)式から，ϵ_{ijk} はその二つの indices が交換されれば，符号を変ずることがわかる．同様なことは，ϵ^{ijk} についてもいえる．言葉を変えていえば，交代テンソルは，任意の二つの指標について，反対称である．したがって，交代テンソルと，任意の対称テンソル $t^{ij}=t^{ji}$ との積の縮約は，

$$\left.\begin{aligned} \epsilon_{ijk}t^{ij}=0, \qquad \epsilon^{ijk}t_{ij}=0 \\ \epsilon_{ijk}t^{ik}=0, \qquad \epsilon^{ijk}t_{ik}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.4.19}$$

である．

ϵ_{ijk} 及び ϵ^{ijk} はテンソルの性質をもつものであるが，交代記号 e_{ijk} 及び e^{ijk} はそうではない．(1.4.4)式で示した行列式の展開公式は ϵ の項で表示することもできる．すなわち，

$$(\det a)\cdot\epsilon_{lmn}=a_l^ia_m^ja_n^k\epsilon_{ijk} \tag{1.4.20 a}$$

$$(\det a)\cdot\epsilon^{ijk}=a_l^ia_m^ja_n^k\epsilon^{lmn} \tag{1.4.20 b}$$

さらに，

$$6(\det a)=a_l^ia_m^ja_n^k\epsilon^{lmn}\epsilon_{ijk} \tag{1.4.21}$$

また，(1.4.6 a)でも同様に，

$$\det A=(\det a)\epsilon^{opq}\epsilon_{rst} \tag{1.4.22}$$

さて，九つの量 δ^i_j は，単位マトリックスの因子であって，その行列式は1に等しい．すなわち，

$$\begin{vmatrix}\delta^1_1 & \delta^1_2 & \delta^1_3\\ \delta^2_1 & \delta^2_2 & \delta^2_3\\ \delta^3_1 & \delta^3_2 & \delta^3_3\end{vmatrix}=1$$

この行列式に，上の(1.4.22)式を適用すれば，

$$\begin{vmatrix}\delta^i_l & \delta^i_m & \delta^i_n\\ \delta^j_l & \delta^j_m & \delta^j_n\\ \delta^k_l & \delta^k_m & \delta^k_n\end{vmatrix}=1\cdot\epsilon^{ijk}\epsilon_{lmn}$$

したがって，上式の左辺を展開して次式を得る．

$$\begin{aligned}\epsilon^{ijk}\epsilon_{lmn}&=\delta^i_l\delta^j_m\delta^k_n-\delta^i_l\delta^j_n\delta^k_m+\delta^i_n\delta^j_l\delta^k_m-\delta^i_n\delta^j_m\delta^k_l+\delta^i_m\delta^j_n\delta^k_l-\delta^i_m\delta^j_l\delta^k_n\\ &=\delta^i_l(\delta^j_m\delta^k_n-\delta^j_n\delta^k_m)+\delta^i_n(\delta^j_l\delta^k_m-\delta^j_m\delta^k_l)+\delta^i_m(\delta^j_n\delta^k_l-\delta^j_l\delta^k_n)\end{aligned} \tag{1.4.23}$$

今，$l=i$ として縮約を実施すれば，

$$\begin{aligned}\epsilon^{ijk}\epsilon_{imn}&=\delta^i_i(\delta^j_m\delta^k_n-\delta^j_n\delta^k_m)+\delta^i_n(\delta^j_i\delta^k_m-\delta^j_m\delta^k_i)+\delta^i_m(\delta^j_n\delta^k_i-\delta^j_i\delta^k_n)\\ &=3(\delta^j_m\delta^k_n-\delta^j_n\delta^k_m)+(\delta^j_n\delta^k_m-\delta^j_m\delta^k_n)+(\delta^j_n\delta^k_m-\delta^j_m\delta^k_n)\\ &=\delta^j_m\delta^k_n-\delta^j_n\delta^k_m\end{aligned} \tag{1.4.24}$$

同様に，$l=i, m=j$ とすれば，

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijn}=\delta^j_j\delta^k_n-\delta^j_n\delta^k_j=3\,\delta^k_n-\delta^k_n=2\,\delta^k_n \tag{1.4.25}$$

さらに，また，$l=i, m=j, n=k$ とすれば，

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk}=2\,\delta^k_k=6 \tag{1.4.26}$$

反対称テンソル a_{ij} では，$i=j$ なる成分はすべて0で，他の成分は，一対毎に $a_{ij}=-a_{ji}$ なる関係にあるので，このようなテンソルはちょうど，ベクトルと同数の独立成分を有する．したがって交代テンソルを用いて，一定のベクトル u^k と，非対称テンソルとを，次の関係式で，結合させうることがわかる《b_{ij} が対称テンソルの場合には，(1.4.19)式によって，次の u^k または u_k は0ベクトルになる》．

$$u^k=b_{ij}\epsilon^{ijk},\qquad u_k=b^{ij}\epsilon_{ijk} \tag{1.4.27}$$

何となれば，上記のベクトルの一つの成分を示せば，$u^1=(b_{23}-b_{32})\epsilon^{231}$ となるが，この式の右辺の $(b_{23}-b_{32})$ は，$[b_{ij}]$ を，対称部分と反対称部分との和に書き表した場合の，反対称部分の2倍の成分であるからである．

以上においては，座標 $x^i(i=1,2,3)$ を用いて，われわれは，三次元空間を取扱ってきた．しかし，力学上の多くの問題は，二次元空間だけについて考察することを必要とする場合が多い．たとえば，平面応力問題や平面流の場は，平

面座標x^1, x^2の項で記述され，また，shellの理論では，曲面上の二つの座標，x^1, x^2が使用される．そこで或る式が，二次元で通用するのか，または三次元で通用するのかを，明確にわかるようにするために，次のような方式をとることが，一般に慣用されている．

次元についての慣用記法：

ラテン文字$i, j, k, l, m, n, \cdots$はすべて1,2,3の次元の範囲をもつものとし，ギリシヤ文字$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$はすべて1,2の次元範囲をもつものとする．またこの規約はfree indices 及び dummy indicesの双方に適用されるものとする．したがってベクトル式$a_i=b_i$は3成分の式を表示し，$a_\alpha=b_\alpha$は，2成分の式を示す．また$a^i b_i$は三つの項の和を示し，$a^\alpha b_\alpha$は二つの項の和を示す．

任意の二次元空間は，二次元空間の座標x^αに，ベクトル$\boldsymbol{g}_\alpha$に垂直な単位基底ベクトル$\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{i}_3$をもつ第3座標$x^3$を追加して得られる一般の三次元空間のsubspaceと考えることができる．そうすると，$g_{\alpha 3}=\boldsymbol{g}_\alpha \cdot \boldsymbol{g}_3=0$，及び$g_{33}=1$であるから，metric tensorの行列式は，次のようになる．

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \qquad (1.4.28)$$

任意の0でない交代テンソルの成分ϵ_{ijk}では，下付添字の一つは3でなければならないから，循環的順序で，われわれは常に$k=3$であるように，(i, j, k)を配列することができる．そうすればi及びjは，1,2の範囲に限定され，二次元交代テンソル$\epsilon_{\alpha\beta}$を次のように導入することができる．

$$\epsilon_{ij3}=\epsilon_{\alpha\beta 3}=\epsilon_{\alpha\beta} \qquad (1.4.29\ \mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned} &\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=0 \\ &\epsilon_{12}=\sqrt{g}=-\epsilon_{21} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.29\ \mathrm{b})$$

また，反変成分は，

$$\left.\begin{aligned} &\epsilon^{ij3}=\epsilon^{\alpha\beta 3}=\epsilon^{\alpha\beta} \\ &\epsilon^{11}=\epsilon^{22}=0, \qquad \epsilon^{12}=\frac{1}{\sqrt{g}}=-\epsilon^{21} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.29\ \mathrm{c})$$

2次の行列式，

$$\det A=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

については，次の公式が成立する．

$$(\det A)\epsilon_{\gamma\delta}=a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta \epsilon_{\alpha\beta} \qquad (1.4.30\ \mathrm{a})$$

$$(\det A)\epsilon^{\alpha\beta}=a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta \epsilon^{\gamma\delta} \qquad (1.4.30\ \mathrm{b})$$

$$2(\det A)=a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta \epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\gamma\delta} \qquad (1.4.30\ \mathrm{c})$$

また，二次元交代テンソルの積は，次の値を有する．

$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}=\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\delta}-\delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\beta}_{\gamma} \qquad (1.4.31\ \mathrm{a})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\alpha}=\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\alpha}-\delta^{\alpha}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\gamma}=\delta^{\beta}_{\gamma}-2\,\delta^{\beta}_{\gamma}=-\delta^{\beta}_{\gamma} \qquad (1.4.31\ \mathrm{b})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\gamma}=\delta^{\beta}_{\gamma} \qquad (1.4.31\ \mathrm{b'})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}=2 \qquad (1.4.31\ \mathrm{c})$$

非対称テンソル$[b_{\gamma\delta}]$では，$(b_{\gamma\delta}-b_{\delta\gamma})$は$\delta\neq\gamma$なるとき0に等しくならない．これは，(1.4.31 a)式を用いて，次のように表すことができる．

$$b_{\gamma\delta}-b_{\delta\gamma}=b_{\alpha\beta}(\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\delta}-\delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\beta}_{\gamma})=b_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta} \qquad (1.4.32)$$

テンソル$[b_{\alpha\beta}]$が対称テンソルである場合には，

$$b_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta}=0 \qquad (1.4.33)$$

二次元ベクトルを $\boldsymbol{v}=u_{\alpha}\epsilon^{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_{\beta}$ とするとき，このベクトル $\boldsymbol{v}$ は，二次元ベクトル $\boldsymbol{u}=u_{\gamma}\boldsymbol{g}^{\gamma}$ に垂直である．何となれば，

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}=u_{\alpha}\epsilon^{\alpha\beta}\boldsymbol{g}_{\beta}\cdot u_{\gamma}\boldsymbol{g}^{\gamma}=u_{\alpha}u_{\gamma}\epsilon^{\alpha\beta}\delta^{\gamma}_{\beta}=u_{\alpha}u_{\beta}\epsilon^{\alpha\beta}$$

であるから，$u_{\alpha}u_{\beta}$ をテンソルの成分と考えれば，$[u_{\alpha}u_{\beta}]$は対称テンソルであるから，上記の(1.4.33)式によって，$u_{\alpha}u_{\beta}\epsilon^{\alpha\beta}=0$，すなわち $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$ であるからである．

1.4.2 交叉乗積または外積，またはベクトル乗積

デカルト座標系(基底ベクトルは単位ベクトル$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$とする)において，二つの基底ベクトルの交叉乗積を次のように定義する．

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\ ;$$

$$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$$

上記の六つの式は，単位ベクトルの代りに $\boldsymbol{g}_i$ または，$\boldsymbol{g}^i$ と書いて，次の一つの形式にまとめて表示することができる．

$$\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j=e_{ijk}\boldsymbol{g}^k$$

デカルト座標系では，$e_{ijk}=\epsilon_{ijk}$ であるから，上式を一般に，

$$\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j=\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k \qquad (1.4.34)$$

と書いて，完全なテンソル記号で表示することにすれば，上式はすべての座標系に通用する．(1.4.34)式は，$\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ がこの順序で， 右手座標系を形成しているときは，ベクトル $\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, (\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j)$ は右手座標系を形成することを意味するが，$\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ がこの順序で左手座標系を形成しているときも，ϵ_{ijk} の符号の定義が右手座標系のときと同じであるから，ベクトル $\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, (\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j)$ は左手座標系的構成をしていることを意味する．

同様にして，(1.4.34)式の代りに，反変基底ベクトルの交叉乗積を，

$$\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j=\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k \qquad (1.4.35)$$

と定義する．

$\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k$ または $\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k$ は通常のベクトルのように，$u_k\boldsymbol{g}^k$ または $u^k\boldsymbol{g}_k$ の形にはなっていないで，基底ベクトルをつけて書いても，なおfree indexとして i, j を保有している．これは，通常のベクトル $\boldsymbol{u}=u^k\boldsymbol{g}_k=u_k\boldsymbol{g}^k$ のように座標系の変換に無関係に一定なベクトルを意味しないで，座標系と共に変化するベクトルであることを意味している．

交代テンソルの記号 ϵ は，共変，反変のいずれにおいても，その二つの指標を交換すれば，符号を変ずるから，次の関係式が成立する．

$$\boldsymbol{g}_j\times\boldsymbol{g}_i=-\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j,\qquad \boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}^i=-\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j \tag{1.4.36}$$

ここで注意すべきことは，特別に例外的な或る場合には，曲線座標系に関連した基底ベクトル $\boldsymbol{g}_i$ は，空間の或る部分では右手座標系であり，他の或る部分では，左手座標系であることもあるということである．しかし，一般にはそのようなことはめったにない．以下においては，話を統一的にするために，特に断りのない限り，$\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ はこの順序で，いつも右手座標系を形成するものとして，話を進める．

二つの基底ベクトルの交叉乗積の定義は，容易に任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ の交叉乗積に拡張することができる．

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=a^i\boldsymbol{g}_i\times b^j\boldsymbol{g}_j=a^ib^j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k=q_k\boldsymbol{g}^k \tag{1.4.37 a}$$

$$q_k=a^ib^j\epsilon_{ijk} \tag{1.4.37 b}$$

$$\text{or}\quad \boldsymbol{q}=a_i\boldsymbol{g}^i\times b_j\boldsymbol{g}^j=a_ib_j\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k=q^k\boldsymbol{g}_k \tag{1.4.38 a}$$

$$q^k=a_ib_j\epsilon^{ijk} \tag{1.4.38 b}$$

一般に，二つのベクトルの交叉乗積によって得られたベクトルは，元の二つのベクトルのそれぞれに垂直である．

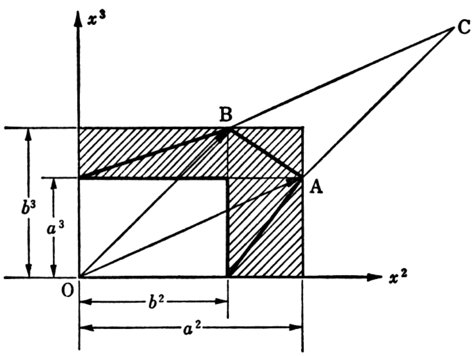
$$\because\quad \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}=q_k\cdot a^k=a^ia^j\epsilon_{ijk}a^k=a^ib^ja^ke_{ijk}\cdot\sqrt{g}$$

$$=\sqrt{g}\begin{vmatrix}a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\\ a^1 & a^2 & a^3\end{vmatrix}=0$$

上式における演算と同様に，(1.4.37 a)式及び(1.4.38 a)式は，それぞれ次のような行列式の展開式であると考えることもできる．

$$\boldsymbol{q}=\sqrt{g}\begin{vmatrix}a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\\ \boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}^3\end{vmatrix}=\sqrt{g}\begin{vmatrix}\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}^3\\ a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\end{vmatrix} \tag{1.4.39 a}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \tag{1.4.39 b}$$



第18図　デカルト座標系における交叉乗積の演算

次に重要なことは，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ の絶対値は，ベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ を2辺とする平行四辺形の面積Aに等しいということである．このことをデカルト座標系 $\boldsymbol{g}_i$ における $\boldsymbol{q}$ の成分が，平行四辺形Aの各座標軸面への投影面積に等しいということによって証明する．

今，$\boldsymbol{a}=a^i\boldsymbol{g}_i$, $\boldsymbol{b}=b^j\boldsymbol{g}_j$, $\boldsymbol{q}=q_k\boldsymbol{g}^k$　とすれば

$$q_k=a^ib^je_{ijk}$$

上記のベクトル成分のうち一つ，たとえば，$q_1=(a^2b^3-a^3b^2)$をとって考えればこれは単位ベクトル $\boldsymbol{g}_2$ 及び $\boldsymbol{g}_3$ の定める平面で，二つの矩形の差であることがわかる．第18図で，OA, OB をそれぞれベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ の，この平面上への投影とすれば，面積 q_1 は斜線を引いた部分の面積である．この面積の1/2は，太線で囲んだ面積に等しく，これは明らかに三角形OABの面積に等しい．一方，三角形 OAB の面積は，平行四辺形 OACB の面積の 1/2 に等しく，かつOACBは，もともと，平行四辺形面積Aの(2, 3)平面への投影である．同様な事柄が，成分 q_2 及び q_3 についても証明される(証明終)．　以上のことから$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$は，その絶対値が $|a|\cdot|b|\cdot\sin\theta$($|a|$, $|b|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ の絶対値，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との間の角度とする)であって，かつその方向が $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ の双方に垂直で $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ に対して，この順序で右ネジの方向に向かうベクトルに等しいことがわかる．すなわち，ベクトルの dot product が $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta$ に等しく，通常のベクトル解析書での定義に一致するのと同様に，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ もまた，通常のベクトル解析書での定義と完全に一致するものである．

1.4.3　ベクトルの Scalar 三重積

二つのベクトルの交叉乗積にさらに第3のベクトルを dot product すれば，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=a^ib^j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k\cdot c^l\boldsymbol{g}_l=a^ib^jc^l\epsilon_{ijk}\delta^k_l$$
$$=a^ib^jc^k\epsilon_{ijk}=a_ib_jc_k\epsilon^{ijk} \tag{1.4.40}$$

他方，
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\beta$$

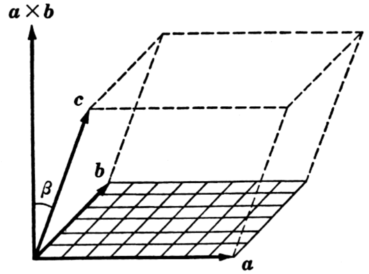
(ただし，｜　｜記号は絶対値を示すものとする)

上記の値は，第19図に示された斜方ブロックの体積V(±の符号を有することに注意)に等しい．したがって，

$$V=a^ib^jc^k\epsilon_{ijk}=a_ib_jc_k\epsilon^{ijk}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} \tag{1.4.41}$$

$$=\sqrt{g}\begin{vmatrix}a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\\ c^1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \tag{1.4.42}$$

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ は，**スカラー三重積**とよばれ，結果は一つのスカラー量である．通常括弧を用いないで書き表しても，交叉乗積がまっ先に行われ，次に dot product が行われるのが，一般の慣行である．なぜならば，dot product $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ はスカラーであって，このスカラーとベクトル $\boldsymbol{a}$ との交叉乗積は無意味であり，上記のように，交叉乗積をまっ先に行い，その次に dot product を行うより以外に，有意義な選択の途はないからである．ただし，もし $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ において，任意の二つの因子を交換すれば，それに伴って，(1.4.40)式の ϵ_{ijk} の対応の下付添字も交換しなければならず，その結果は，



第19図　ベクトルのスカラー三重積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=a^ic^kb^j\epsilon_{ikj}=-a^ic^kb^j\epsilon_{ijk}=-V$$

となるから，スカラー三重積は，それに用いられるベクトルの順序に関係することに注意しなければならない．上式から，因子の cyclic な交換は同一の結果を与えるが，因子の anticyclic な連環順序は，反対符号の結果を与えることがわかる．すなわち，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}&=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\ &=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned} \tag{1.4.43}$$

上の関係式を，Heaviside の関係式という．

さらに，dot product の二つの因子は，これを交換しても同じであるから，

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$$

したがって，前の式と比べて次のことがわかる．

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \tag{1.4.44}$$

上式は，どこに(×)を入れ，またどこに(·)を入れるかは，結果に無関係で，結果に影響するのは，単に因子の連環順序だけであることを示している．すなわち，スカラー三重積は，右手座標系では因子が右手系を構成するように並べられたときに(+)の符号を有し，そうでないときには(−)の符号を有する．Grassmann は，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ のスカラー三重積，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（または $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$）を簡単に $[\boldsymbol{abc}]$ のように表したが，これを **Grassmann の記号**という．

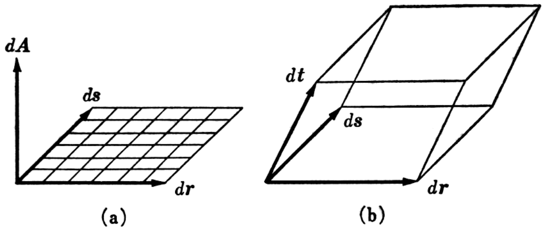
(1.4.34)式から $\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2=\epsilon_{123}\boldsymbol{g}^3=\sqrt{g}\ \boldsymbol{g}^3$ であるから，

$$\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2\cdot\boldsymbol{g}_3=\sqrt{g}\,\boldsymbol{g}^3\cdot\boldsymbol{g}_3=\sqrt{g} \tag{1.4.45}$$

また同様にして，次式が得られる．

$$\boldsymbol{g}^1\times\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}^3=\epsilon^{123}\boldsymbol{g}_3\cdot\boldsymbol{g}^3=\frac{1}{\sqrt{g}} \tag{1.4.46}$$

(1.4.45)式から，$\sqrt{g}$ は共変基底ベクトルを隣接3辺とするブロックの体積に等しいことがわかる．また共変基底ベクトルによって形成されるブロックの体積と，反変基底ベクトルによって形成されるブロックの体積とは互いに逆数の関係にあることがわかる．(1.4.45)式及び(1.4.46)式の値は，同一座標系でも，曲線座標系の場合のように，座標網の枠組(coordinate-frame)の大きさが場所によって異なる座標系では，場所によってその値が変ることに注意しなければならない．



第20図　面積素片及び体積素片

今，(1.4.37)式において，$\boldsymbol{a}=d\boldsymbol{r},\boldsymbol{b}=d\boldsymbol{s}$ として表し，この式を次の形式，

$$d\boldsymbol{A}=d\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s}$$

$$dA_k=dr^i ds^j\epsilon_{ijk} \tag{1.4.47}$$

のように書き直すと，上式は面積素片を，それに垂直なベクトルで表していることになる(第20図参照)．他方，体積素片，

$$dV=d\boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{t}=dr^i ds^j dt^k\epsilon_{ijk} \tag{1.4.48}$$

は一つのスカラー(N.B.：±の符号を含む．第20図参照)である．何となれば三つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ によって形成されるブロックの体積は，(1.4.41)式において indices i,j,k がすべて dummy indices であることから，座標系に無関係であることがわかるからである．

今，或る座標系の同一場所において，三つのベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ を，二階のテンソル $[d^i_{\cdot j}]$ によって，

$$\left.\begin{aligned} e^i&=d^i_{\cdot j}a^j\\ f^i&=d^i_{\cdot j}b^j\\ h^i&=d^i_{\cdot j}c^j \end{aligned}\right\}$$

のように変換し，ベクトル $\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\boldsymbol{h}$ によって形成されるブロックの体積を考えて

みる．ベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}$ によって形成されるブロックの体積も，上述のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ によって作られる体積の場合と同様に，座標系の変換には無関係である．ベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}$ によって形成されるブロックの体積 V' は，(1.4.41)式及び(1.4.42)式によって，

$$V'=e^i f^j h^k \epsilon_{ijk}=\sqrt{g}\begin{vmatrix} e^1 & f^1 & h^1 \\ e^2 & f^2 & h^2 \\ e^3 & f^3 & h^3 \end{vmatrix}=\sqrt{g}\begin{vmatrix} d^1_{\cdot 1} & d^1_{\cdot 2} & d^1_{\cdot 3} \\ d^2_{\cdot 1} & d^2_{\cdot 2} & d^2_{\cdot 3} \\ d^3_{\cdot 1} & d^3_{\cdot 2} & d^3_{\cdot 3} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$=|d^i_{\cdot j}|\cdot(a^i b^j c^k \epsilon_{ijk})=|d^i_{\cdot j}|\cdot V \qquad (1.4.49)$$

ただし，$|d^i_{\cdot j}|$ は，$d^i_{\cdot j}$ によって作られる行列式の値を示し，また V は，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ によって形成されるブロックの体積を表すものとする．

すなわち，この場合 $|d^i_{\cdot j}|$ は V' の V に対する倍率であることがわかる．しかるに，上述のように，V' 及び V は座標系の変換によって不変であるから，$|d^i_{\cdot j}|$ もまた，座標系の変換によって不変でなければならないことがわかる．

しかしながら，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ をテンソル $[d_{ij}]$ によって変換する場合，テンソル $[d_{ij}]$ によって変換された結果，得られるベクトル成分は，

$$\left.\begin{aligned} e_i&=d_{ij}a^j \\ f_i&=d_{ij}b^j \\ h_i&=d_{ij}c^j \end{aligned}\right\}$$

ベクトル $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}$ によって形成されるブロックの体積 V' は，(1.4.41)式及び(1.4.42)式により，

$$V'=e_i f_j h_k \epsilon^{ijk}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} e_1 & f_1 & h_1 \\ e_2 & f_2 & h_2 \\ e_3 & f_3 & h_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

$$=|d_{ij}|\cdot\frac{1}{g}\sqrt{g}\begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=\frac{1}{g}|d_{ij}|\cdot(a^i b^j c^k \epsilon_{ijk})$$

$$=\frac{1}{g}|d_{ij}|V \qquad (1.4.50)$$

したがって，この場合，体積 V' の V に対する倍率は，$(1/g)|d_{ij}|$ である．すなわち，この場合には，$(1/g)|d_{ij}|$ は，座標系の変換に無関係に不変であるが，$|d_{ij}|$ は不変ではないことがわかる．

《N. B.：

$$a=\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}=a^i_1 a^j_2 a^k_3 e_{ijk}$$

また一方，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が形成するブロックの体積 V は，

$$V=a_1^i a_2^j a_3^k \epsilon_{ijk}=\sqrt{g}\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

上記の2量 a 及び V は，表示形式が互いに似かよっているが，相異なることに注意する必要がある.》

連続体の力学では，われわれはしばしば，面積または体積の単位当りについて定義される量に遭遇する．今，若干の実例を挙げてみよう．

体積素片の質量 dm は，密度 ρ と体積 dV との積である．すなわち，

$$dm=\rho dV=\rho dr^i ds^j dt^k \epsilon_{ijk}$$

基底ベクトル $\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j, \boldsymbol{g}_k$ に，座標系の変換を実施すれば，

$$\boldsymbol{g}_i=\beta_i^{l'}\boldsymbol{g}_{l'}, \qquad dr^i=\beta_{l'}^i dr^{l'}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad dm&=\rho\beta_{l'}^i\beta_{m'}^j\beta_{n'}^k dr^{l'}ds^{m'}dt^{n'}\beta_i^{p'}\beta_j^{q'}\beta_k^{r'}\epsilon_{p'q'r'}\\ &=\rho\delta_{l'}^{p'}\delta_{m'}^{q'}\delta_{n'}^{r'}dr^{l'}ds^{m'}dt^{n'}\epsilon_{p'q'r'}\\ &=\rho dr^{p'}ds^{q'}dt^{r'}\epsilon_{p'q'r'}\end{aligned}$$

すなわち，予期されたように，体積は当然同じ形で表され，ρ はすべての座標系を通じて不変なスカラーである．

上述の事柄と同じ事柄が，流体またはガスの圧力 p についても成立する．圧力 p と，それが作用する面積素片 $d\boldsymbol{A}$ との積は力であり，この力は，面積素片に垂直，すなわち $d\boldsymbol{A}$ の方向を有する．もし $d\boldsymbol{A}$ の方向を，面積素片の外方垂直に定めれば，力 $d\boldsymbol{F}$ は，

$$d\boldsymbol{F}=-pd\boldsymbol{A}, \qquad dF_k=-pdA_k=-pdr^i ds^j \epsilon_{ijk}$$

ここで再び，他の座標系に変換すれば，$dr^i ds^j \epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k$ は，新座標系でも，同一の形式に変換され，スカラー p は不変のまま残る．

体積素片 dV の重量 $d\boldsymbol{W}$ は，体積 dV と，比重 $\boldsymbol{\gamma}=\gamma^l\boldsymbol{g}_l$ との積，

$$d\boldsymbol{W}=\gamma^l\boldsymbol{g}_l dV=\gamma^l\boldsymbol{g}_l dr^i ds^j dt^k \epsilon_{ijk}$$

である．他の座標系 $\boldsymbol{g}_{l'}$ で，同じ体積 dV の，同じ重量は，

$$d\boldsymbol{W}=\gamma^{l'}\boldsymbol{g}_{l'}dr^{i'}ds^{j'}dt^{k'}\epsilon_{i'j'k'}$$

のように表される．γ^l は，密度 ρ とは異なり，任意の反変ベクトル成分と同様に，座標変換されることに注意する必要がある．同様なことが，連続体力学の平衡条件式に現れる単位体積当りの外力 X^l についてもいえる．

以上述べた事柄では，交叉乗積の二つの因子は，常に長さのdimensionをもっていた．また，第1.1章の初めにdot productを，長さと力との積，すなわち仕事量として導入した．そこでここでもさらに，力と距離との交叉乗積，すなわち，挺子の臂長さベクトル $\boldsymbol{r}$ に作用する力 $\boldsymbol{P}$ のモーメントなる量について考えてみることにする．これは，次のような二つのベクトル量の交叉乗積で

ある.

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \tag{1.4.51}$$

今，上の三つのベクトルを，それぞれ基底ベクトルに対する成分で表示すれば (1.4.37 a)式から，

$$M_k=r^iP^j\epsilon_{ijk} \tag{1.4.52}$$

を得る．したがって，モーメント $\boldsymbol{M}$ の，任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ の方向に対する成分は，次のように表わされる．

$$\frac{\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{M_ka^k}{\sqrt{a_la^l}}=\frac{r^iP^ja^k\epsilon_{ijk}}{\sqrt{a_la^l}} \tag{1.4.53}$$

1.4.4 座標系変換係数とその Jacobian

第 1.1.5 節で述べた座標系変換係数 $\beta^j_{i'}$ は，共変成分 x_j を他の座標系の共変成分 $x_{i'}$ に表示変換をするか，または反変成分 $x^{i'}$ を他の座標系の反変成分 x^j に表示変換を行う場合に用いられる係数であった．もし，共変成分を他の座標系の反変成分に表示変換するとか，または反変成分を他の座標系の共変成分に表示変換することを希望する場合には，座標系変換係数 $\beta^j_{i'}$ を用いて共変成分を共変成分に，または反変成分を反変成分に，表示変換しておいて，その後で metric tensor を用いて共変成分を同一座標系内の反変成分に，または反変成分を同一座標系内の共変成分に，表示変換すればよい．あるいは，まず metric tensor を用いて，元の座標系内で共変成分を反変成分に，または反変成分を共変成分に表示変換をしておいて後，座標系変換係数 $\beta^j_{i'}$ を用いて，両座標系間の表示変換を行えばよい．したがって座標系変換係数，

$$\beta^j_{i'}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

は，あらゆる場合に対して十分適用しうるもので，別に何の不足もない．しかしながら，われわれは，次のような値，

$$\frac{\partial x^j}{\partial x_{i'}},\quad \frac{\partial x_j}{\partial x^{i'}}\quad 及び\quad \frac{\partial x_j}{\partial x_{i'}}$$

が $\beta^j_{i'}$ と，どのような関係にあるかについて，いささか興味を感ずるので次にそれについて考えてみよう．

$$dx^j=\frac{\partial x^j}{\partial x_{i'}}dx_{i'}=\frac{\partial x^j}{\partial x_{i'}}dx^{j'}g_{i'j'}=\left(\frac{\partial x^j}{\partial x_{i'}}g_{i'j'}\right)dx^{j'}$$

また，

$$dx^j=\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}dx^{j'}=\beta^j_{j'}dx^{j'}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial x^j}{\partial x_{i'}}g_{i'j'}=\beta^j_{j'}$$

両辺に $g^{j'k'}$ を乗じて，　$\dfrac{\partial x^j}{\partial x_{i'}} g_{i'j'} g^{j'k'} = \beta^j_{j'} g^{j'k'}$

$$\therefore \quad \frac{\partial x^j}{\partial x_{i'}} \delta^{k'}_{i'} = \beta^j_{j'} g^{j'k'}$$

i. e.,
$$\frac{\partial x^j}{\partial x_{i'}} = \beta^j_{j'} g^{i'j'} \tag{1.4.54}$$

また，
$$\frac{\partial x_j}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} g_{ij} = \beta^i_{i'} g_{ij} \tag{1.4.55}$$

したがって，上記２式，(1.4.54)及び(1.4.55)を応用して，

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x_{i'}} g_{ij} = \beta^i_{j'} g^{i'j'} g_{ij} \tag{1.4.56}$$

なることがわかる．

次に1.4.1で述べた座標系変換係数の行列式 $|\beta^i_{i'}| \equiv \varDelta$ は，

$$\varDelta \equiv |\beta^i_{i'}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\[2ex] \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\[2ex] \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{vmatrix}$$

であるが，この行列式を，一般に Jacobian といい，次のように表す慣わしがある．すなわち，

$$\varDelta \equiv |\beta^i_{i'}| \equiv \left| \frac{\partial (x^1 x^2 x^3)}{\partial (x^{1'} x^{2'} x^{3'})} \right| \equiv J \tag{1.4.57}$$

そうすると，(1.4.11)式によって，この Jacobian は次の値を有することがわかる．

$$J \equiv \varDelta \equiv |\beta^i_{i'}| = \pm \sqrt{\frac{g'}{g}} \tag{1.4.58}$$

ただし，上式の(±)符号は，座標系 $(i'\ j'\ k')$ 及び $(i\ j\ k)$ が共に同系統座標系であれば(+)，もし逆系統座標系であれば(−)をとるものとする．

固着ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ がこの順序で右手系を形成しており，座標系 $(i\ j\ k)$ 及び $(i'\ j'\ k')$ が共に右手座標系であるとき，固着ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が形成するブロックの体積 V は，

$$V = a^i b^j c^k \epsilon_{ijk} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^{1'} & a^{2'} & a^{3'} \\ b^{1'} & b^{2'} & b^{3'} \\ c^{1'} & c^{2'} & c^{3'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta^1_{1'} & \beta^2_{1'} & \beta^3_{1'} \\ \beta^1_{2'} & \beta^2_{2'} & \beta^3_{2'} \\ \beta^1_{3'} & \beta^2_{3'} & \beta^3_{3'} \end{vmatrix}$$

$$= \sqrt{g}\, a^{i'} b^{j'} c^{k'} e_{i'j'k'} \cdot \varDelta = \sqrt{g}\, a^{i'} b^{j'} c^{k'} e_{i'j'k'} \left(\sqrt{\frac{g'}{g}} \right)$$

$$= a^{i'} b^{j'} c^{k'} \sqrt{g'}\, e_{i'j'k'} = a^{i'} b^{j'} c^{k'} \epsilon_{i'j'k'}$$

上式の左辺及び右辺は，体積Vを正の符号で示している．もし，固着ベクトル$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$が元のまま（この順序で右手系）で，座標系$(i\,j\,k)$及び$(i'\,j'\,k')$が共に左手座標系であれば，上式の両辺は，形式上はそのままであるが，実質上は体積Vを負の符号で示している．しかし，両座標系$(i\,j\,k)$及び$(i'\,j'\,k')$が逆系統のものであれば，形式上においても，上式の右辺に（−）の符号をつけ加えなければならない．

上と同様にして，固着ベクトル$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$が形成するブロックの体積$V$は，次のように表すこともできる．

$$V = a_i b_j c_k \epsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} a_{1'} & a_{2'} & a_{3'} \\ b_{1'} & b_{2'} & b_{3'} \\ c_{1'} & c_{2'} & c_{3'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_1^{1'} & \beta_2^{1'} & \beta_3^{1'} \\ \beta_1^{2'} & \beta_2^{2'} & \beta_3^{2'} \\ \beta_1^{3'} & \beta_2^{3'} & \beta_3^{3'} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} a_{i'} b_{j'} c_{k'} e^{i'j'k'} \cdot \frac{1}{\varDelta} = \frac{1}{\sqrt{g}} a_{i'} b_{j'} c_{k'} e^{i'j'k'} \left(\pm \sqrt{\frac{g}{g'}} \right)$$

$$= \pm a_{i'} b_{j'} c_{k'} \epsilon^{i'j'k'}$$

ただし，（±）の符号は前述のとおりとする．

上述のことから，次式の成立することがわかる．

$$\left| \frac{\partial(x_1 x_2 x_3)}{\partial(x_{1'} x_{2'} x_{3'})} \right| \equiv \left| \frac{\partial x_j}{\partial x_{i'}} \right| = \frac{|a_j|}{|a_{i'}|} = |\beta_k^{l'}| = \pm \sqrt{\frac{g}{g'}} \equiv \frac{1}{\varDelta} \equiv \left| \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} \right| \equiv \left| \frac{\partial(x^{1'} x^{2'} x^{3'})}{\partial(x^1 x^2 x^3)} \right| \tag{1.4.59}$$

ただし，上式においても（±）の符号は，前述の通りとする．また，上式(1.4.59)は個々の成分について，

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_{i'}} = \beta_j^{i'}$$

なることを意味するものではないことに注意しなければならぬ（ただし，個々の成分について，$\beta_j^{i'} = \partial x^{i'}/\partial x^j$なることはもちろんである）．上式の左辺は，(1.4.56)式により，

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_{i'}} = \beta_{j'}^{i} g^{i'j'} g_{ij}$$

であって，$\beta_{j'}^{i} g^{i'j'} g_{ij} \neq \beta_j^{i'}$である．metric tensor $g^{i'j'}$及びg_{ij}は，テンソル（同一座標系内で成分表示がなされるもの）の index を，上下する場合にのみ使用されるものであることを忘れてはならない．

また，体積　$V = a_i b_j c_k \epsilon^{ijk} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} a^{1'} & a^{2'} & a^{3'} \\ b^{1'} & b^{2'} & b^{3'} \\ c^{1'} & c^{2'} & c^{3'} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{1'}^1 & \beta_{1'}^2 & \beta_{1'}^3 \\ \beta_{2'}^1 & \beta_{2'}^2 & \beta_{2'}^3 \\ \beta_{3'}^1 & \beta_{3'}^2 & \beta_{3'}^3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} a^{i'} b^{j'} c^{k'} e_{i'j'k'} \cdot \varDelta \cdot g$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}a^{i'}b^{j'}c^{k'}e_{i'j'k'}\left(\pm\sqrt{\frac{g'}{g}}\right)g=\pm a^{i'}b^{j'}c^{k'}\epsilon_{i'j'k'}$$

$$\therefore\quad \left|\frac{\partial(x_1x_2x_3)}{\partial(x^{1'}x^{2'}x^{3'})}\right|=|\beta^i_{i'}|\cdot g=\left(\pm\sqrt{\frac{g'}{g}}\right)g=\pm\sqrt{gg'} \qquad (1.4.60)$$

ただし，(±)の符号は前述の通りとする．

さらに，体積　$V=a^ib^jc^k\epsilon_{ijk}=\sqrt{g}\begin{vmatrix}a^1 & a^2 & a^3\\ b^1 & b^2 & b^3\\ c^1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}$

$$=\sqrt{g}\begin{vmatrix}a_{1'} & a_{2'} & a_{3'}\\ b_{1'} & b_{2'} & b_{3'}\\ c_{1'} & c_{2'} & c_{3'}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\beta^{1'}_1 & \beta^{1'}_2 & \beta^{1'}_3\\ \beta^{2'}_1 & \beta^{2'}_2 & \beta^{2'}_3\\ \beta^{3'}_1 & \beta^{3'}_2 & \beta^{3'}_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}g^{11} & g^{21} & g^{31}\\ g^{12} & g^{22} & g^{32}\\ g^{13} & g^{23} & g^{33}\end{vmatrix}=\sqrt{g}\,a_{i'}b_{j'}c_{k'}e^{i'j'k'}\cdot\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1}{g}$$

$$=a_{i'}b_{j'}c_{k'}e^{i'j'k'}\left(\pm\sqrt{\frac{g}{g'}}\right)\frac{1}{\sqrt{g}}=\pm a_{i'}b_{j'}c_{k'}\epsilon^{i'j'k'}$$

$$\therefore\quad \left|\frac{\partial(x^1x^2x^3)}{\partial(x_{1'}x_{2'}x_{3'})}\right|=|\beta^{i'}_i|\frac{1}{g}=\pm\frac{1}{\sqrt{gg'}} \qquad (1.4.61)$$

ただし，(±)の符号は，前述の通りとする．

1.4.5　ベクトルのベクトル三重積

次にベクトル三重積，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ について考えてみよう．ベクトル三重積はいずれのベクトル乗積の演算を先にするかによって結果が異なる．上記のベクトル三重積では，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ を先に演算するから，その結果は，まず $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ に垂直で，かつ右手座標系では $\boldsymbol{b}$ 及び $\boldsymbol{c}$ に対して，この順序で右ネジの方向をもつベクトル $\boldsymbol{d}$ が得られ，次にベクトル $\boldsymbol{a}$ と，先に得られたベクトル $\boldsymbol{d}$ とのベクトル乗積によって，$\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{d}$ に垂直で，かつ $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{d}$ に対して，この順序で右ネジの方向をもつベクトル $\boldsymbol{e}$ が最後に得られる．$\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{d}$ に垂直であるから，$\boldsymbol{e}$ は，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とのなす平面の中にあることになる．すなわち，$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ とは共面である．

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times(b^ic^j\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j)=\boldsymbol{a}\times b^ic^j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k=a_lb^ic^j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^l\times\boldsymbol{g}^k \qquad (l\neq k)$$

（i）　$l=i$ なるとき：

$$\text{上式}=a_ib^ic^j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^k=a_ib^ic^j\epsilon_{ijk}\epsilon^{ikj}\boldsymbol{g}_j=-a_ib^ic^j\boldsymbol{g}_j=-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

（ii）　$l=j$ なるとき：

$$\text{上式}=a_jb^ic^j\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^j\times\boldsymbol{g}^k=a_jc^jb^i\epsilon_{ijk}\epsilon^{jki}\boldsymbol{g}_i=a_jc^jb^i\boldsymbol{g}_i=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \qquad (1.4.62)$$

また，上式から，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ を得ることができる．すなわち，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$$
$$=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \qquad (1.4.63)$$

以上，本書では，空間を主として三次元及び二次元の実空間に限定して，話を進めてきたが，交叉乗積に関しては，四次元への拡張についても，ここで少し触れておくことにする．

まず，最初に，初めに立ち返って，ベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び $\boldsymbol{b}$ を二次元に限定してみる．

$$\boldsymbol{a}=a^{\alpha}\boldsymbol{g}_{\alpha}, \qquad \boldsymbol{b}=b^{\beta}\boldsymbol{g}_{\beta}$$

そうすると，(1.4.37 a)式での k は必然的に3に等しくなる．

$$\boldsymbol{g}_{\alpha}\times\boldsymbol{g}_{\beta}=\epsilon_{\alpha\beta3}\boldsymbol{g}^{3}$$

$$q_{3}=a^{\alpha}b^{\beta}\epsilon_{\alpha\beta3}=a^{\alpha}b^{\beta}\epsilon_{\alpha\beta}$$

二次元の座標系変換では，旧基底ベクトル $\boldsymbol{g}_{\alpha}$ を，これらの基底ベクトルが定める平面内で，新基底ベクトル $\boldsymbol{g}_{\gamma'}$ に変換し，新・旧基底ベクトル $\boldsymbol{g}_{\gamma'}$ 及び $\boldsymbol{g}_{\alpha}$ に垂直に，単位ベクトル $\boldsymbol{g}^{3}=\boldsymbol{g}_{3}$ をとる．したがって $\boldsymbol{g}_{3}=\boldsymbol{g}^{3}$ 及び q_{3} は，二次元の座標系変換では変化しない．すなわち，二次元空間では，交叉乗積はスカラーである．

四次元の場合には，本書では，指標文字として，I, J, K, L を用い，それぞれ1,2,3,4の範囲で変化しうるものとする．そしてまず，交代記号 e_{IJKL} の定義をデカルト座標系で次のように定める．

$$\left.\begin{array}{ll}I, J, K, L=1,2,3,4 \text{ またはこの連繋順序での偶順列であるとき：} & e_{IJKL}=1\\ I, J, K, L=1,2,3,4 \text{ の奇順列であるとき：} & e_{IJKL}=-1\\ I, J, K, L \text{ の四つがすべては異なっていないとき：} & e_{IJKL}=0\end{array}\right\}$$

次に，上記のデカルト座標系を，他の一般座標系に，座標系の変換法則(係数 β の法則)に基づいて変換することによって，交代テンソル ϵ_{IJKL} を定義する．

さらに四次元の交叉乗積を定義するのに，次の二つの方法が考えられる．

まず第1の方法は，二つのベクトル

$$\boldsymbol{a}=a^{I}\boldsymbol{g}_{I} \quad \text{及び} \quad \boldsymbol{b}=b^{J}\boldsymbol{g}_{J}$$

の交叉乗積の成分を，次のように定義することである．

$$q_{KL}=a^{I}b^{J}\epsilon_{IJKL} \tag{1.4.64}$$

この交叉乗積は二階のテンソルである．二次元または三次元の場合と同様に，上記の成分は，二つのベクトルの連繋順序が逆転すれば符号を変ずる．すなわち，

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

さらに，このテンソル q_{KL} は，反対称である．すなわち，

$$q_{KL}=-q_{LK}$$

交叉乗積を定義する第2の方法は，第3のベクトル $\boldsymbol{c}=c^{K}\boldsymbol{g}_{K}$ を導入して，三重交叉乗積，

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=q_L\boldsymbol{g}^L$$
$$q_L=a^I b^J c^K \epsilon_{IJKL} \tag{1.4.65}$$

を定義することである．この乗積結果は，四次元ベクトルである．三次元の場合の対応量，$a^i b^j \epsilon_{ijk}$ のように，その二つのベクトルの順序の交換は，結果の符号を変ずる．

上述のような**二つの交叉乗積の定義の拡張は，互いに一致する**もので，いずれも，任意の高次元空間に，さらに拡張することができる．

しかし，dot product の拡張は，今更改めていうには及ばないものである．dot product で必要な事柄は，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u^n v_n$ において，index n の通用範囲を広げることだけである．

第1.5章　応　力 (Stress)

応力を定義するには，任意の大きさ及び任意の方向を有する面積素片を定義しなければならない．面積素片は弾性体の変形途上で刻々と変化するから，われわれは，面積素片を記述するために，埋込座標系を用いるか，あるいは，剛結枠座標系における空間座標(spatial coordinates)x^i を用いるかのいずれかによらなければならない．前者の埋込座標系による記述では，物点の座標値は，剛結枠座標系における物点座標(material coordinates)と同様に，終始変らないが，基底ベクトルが刻々と変化している．これに反して，剛結枠座標系による記述では，物点の空間座標値 x^i は，刻々と変化しているが，基底ベクトルは，終始変らない．しかし第1.3章で述べた埋込座標系による歪の第1定義は，結局，変形前の座標系の基底ベクトルを基礎としたテンソル成分で表すことができた．この変形前の座標系の基底ベクトルは，剛結枠座標系における基底ベクトルと同じである．われわれは，以下ここでは，応力を記述するための面積素片を表すのに，剛結枠座標系における空間座標 x^i を用いることにする．

1.5.1　応力テンソル (Stress tensor)

前章で平行四辺形の面積素片は，成分 dA_i をもつベクトル $\boldsymbol{dA}$ で表されることを述べた．面積素片の背面には，何らかの物質があり，その前面には物質のない空間が広がっているものと考える．面積素片の外法線は，物質のない空間の方向を指向するものとする．

任意の点で，任意の微小面積を選び，その点の近傍にある点Oにおける座標系の基底ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ と，この微小面積とが交わる点をそれぞれ，A, B, C とする(第21図(a)参照)．

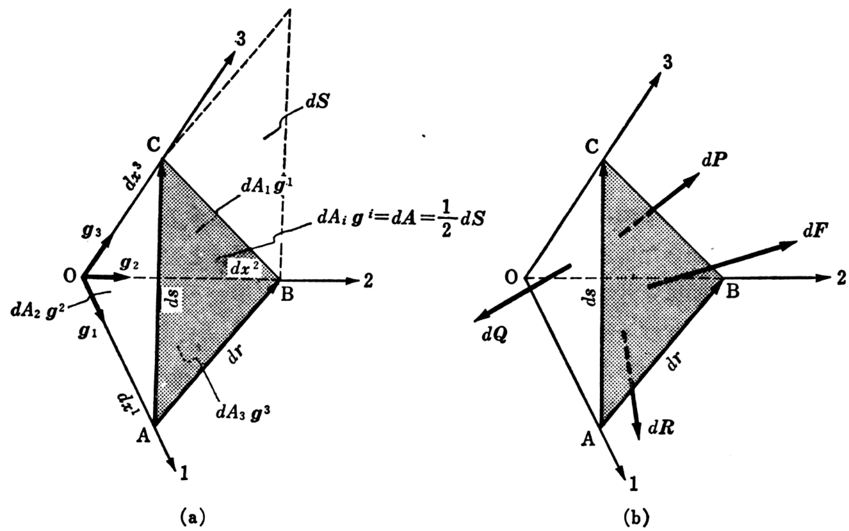
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = d\boldsymbol{r}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = d\boldsymbol{s}$$

$$d\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} d\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{s} = \frac{1}{2} d\boldsymbol{S} \tag{1.5.1}$$

$$d\boldsymbol{r} = dx^2 \boldsymbol{g}_2 - dx^1 \boldsymbol{g}_1, \qquad d\boldsymbol{s} = dx^3 \boldsymbol{g}_3 - dx^1 \boldsymbol{g}_1$$

$$\therefore \quad d\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(dx^2 \boldsymbol{g}_2 - dx^1 \boldsymbol{g}_1) \times (dx^3 \boldsymbol{g}_3 - dx^1 \boldsymbol{g}_1)$$

$$= \frac{1}{2}(dx^2 dx^3 \boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3 + dx^3 dx^1 \boldsymbol{g}_3 \times \boldsymbol{g}_1 + dx^1 dx^2 \boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2)$$



第21図 応力の定義

$$=\frac{1}{2}(dx^2 dx^3 \epsilon_{231} \boldsymbol{g}^1 + dx^3 dx^1 \epsilon_{312} \boldsymbol{g}^2 + dx^1 dx^2 \epsilon_{123} \boldsymbol{g}^3)$$

$$= dA_i \boldsymbol{g}^i \tag{1.5.2}$$

ただし,

$$\left.\begin{aligned} dA_1 &= \frac{1}{2}\epsilon_{231} dx^2 dx^3 = \frac{1}{2}\epsilon_{123} dx^2 dx^3 \\ dA_2 &= \frac{1}{2}\epsilon_{312} dx^3 dx^1 = \frac{1}{2}\epsilon_{123} dx^3 dx^1 \\ dA_3 &= \frac{1}{2}\epsilon_{123} dx^1 dx^2 \end{aligned}\right\}$$

他方, 側面三角形 OAB, OBC, OAC は, その外法線によってそれぞれ次のように表される.

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}dx^2 \boldsymbol{g}_2 \times dx^1 \boldsymbol{g}_1 &= \frac{1}{2}dx^2 dx^1 \epsilon_{213} \boldsymbol{g}^3 = -dA_3 \boldsymbol{g}^3 \\ \frac{1}{2}dx^3 \boldsymbol{g}_3 \times dx^2 \boldsymbol{g}_2 &= \frac{1}{2}dx^3 dx^2 \epsilon_{321} \boldsymbol{g}^1 = -dA_1 \boldsymbol{g}^1 \\ \frac{1}{2}dx^1 \boldsymbol{g}_1 \times dx^3 \boldsymbol{g}_3 &= \frac{1}{2}dx^1 dx^3 \epsilon_{132} \boldsymbol{g}^2 = -dA_2 \boldsymbol{g}^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.5.3}$$

ゆえに, 四面体 OABC の 4 面を表す四つのベクトルの総和は, 0 になること, 及びO点に交わる 3 側面の内法線は, 面積素片 $d\boldsymbol{A}$ の共変成分であること

がわかる.

さてこの四面体が，物体から切取られたものと仮想し，その四つの面に第 21 図に示すように，力 $d\boldsymbol{P}, d\boldsymbol{Q}, d\boldsymbol{R}$ 及び $d\boldsymbol{F}$ が作用するものとする．これらの力は，それぞれの作用する面積に比例し，かつそれぞれ，反変成分に分解されるものと考えることができる.

$$\left.\begin{aligned} d\boldsymbol{P} &= -\sigma^{1j} dA_1 \boldsymbol{g}_j \\ d\boldsymbol{Q} &= -\sigma^{2j} dA_2 \boldsymbol{g}_j \\ d\boldsymbol{R} &= -\sigma^{3j} dA_3 \boldsymbol{g}_j \end{aligned}\right\} \tag{1.5.4}$$

上記の力，たとえば，$d\boldsymbol{P}$ はあたかも $d\boldsymbol{P} = -\sigma^{1j}\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_j dA_1 \boldsymbol{g}^1 = -\sigma^{1j} dA_1 \boldsymbol{g}_j$ のように考えることができる．また，第 21 図の四面体の平衡条件として，すべての作用外力の和は，0 でなければならないから，

$$d\boldsymbol{F} = -d\boldsymbol{P} - d\boldsymbol{Q} - d\boldsymbol{R} = \sigma^{ij} dA_i \boldsymbol{g}_j = dF^j \boldsymbol{g}_j \tag{1.5.5}$$

$$\therefore \quad dF^j = \sigma^{ij} dA_i \tag{1.5.6}$$

上式は，σ^{ij} が四面体 OABC の三つの側面に作用する力を表すだけでなく，dA_i なる成分をもつ任意の面積素片に作用する力をも表すことを示している．dF^j 及び dA_i はそれぞれ，同一座標系におけるベクトル成分であるから，$[\sigma^{ij}]$ は，ベクトル $d\boldsymbol{A}$ を他のベクトル $d\boldsymbol{F}$ に変換する二階のテンソル (応力テンソル) であることがわかる.

今，座標系 $\boldsymbol{g}_i (i=1,2,3)$ として，単位直交基底ベクトル，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ をもつデカルト座標系をとれば，σ^{ij} は普通工業的に応力とよばれているものと同じであることがわかる．すなわち，

$$\sigma^{11} = \sigma_{xx} = \sigma_x, \qquad \sigma^{12} = \sigma_{xy} = \tau_{xy}, \qquad \text{etc.}$$

周知の通り，デカルト座標系では，微小立方体素片の回転に関する平衡条件から $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ etc. なる関係が成立するから，応力テンソルは，対称テンソルであって，このことは座標系のいかんに関係がない．すなわち，常に，

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \tag{1.5.7}$$

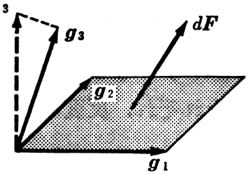
である．この対称性は異方体についても，成立することに注意しておく必要がある.

以上，上記のところでは，応力テンソルの反変成分だけについて考察したが，もちろん，metric tensor を用いて，他の形態の応力テンソルを導入することができる．すなわち，

$$\sigma^{i}_{\cdot j} = \sigma^{ik} g_{kj}, \qquad \sigma_j^{\cdot i} = \sigma^{ki} g_{kj}, \qquad \sigma_{ij} = \sigma^{kl} g_{ki} g_{lj}$$

また，
$$\sigma^{ik} = \sigma^{ki},$$

$$\therefore \quad \sigma^{i}_{\cdot j} = \sigma_j^{\cdot i} = \sigma^i_j \tag{1.5.8}$$



第22図 座標面に作用する外力の成分，dF

しかし，第1.1章で述べたように，$\sigma^j_i \neq \sigma^i_j$ であることに注意しなければならぬ．このことは $[\sigma^j_i]$ には相異なる成分が九つあるが，$[\sigma^{ij}]$ には，相異なる成分は単に六つだけであることを示すものである．それゆえ，混合変化成分は，他の変化成分に比べて，使用上は，好ましくない形態であることがわかる．

色々な形態の異なる応力成分を，図解的に示すことは，比較的容易である．共変基底ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ によって作られる面積素片を(第 22 図)，一様な応力状態の物体中に考えてみると，(1.5.5)式及び(1.5.6)式から一般に，

$$d\boldsymbol{F}=\sigma^{ij}dA_i\boldsymbol{g}_j \qquad (1.5.9\ \mathrm{a})$$

ただし，今の場合には，

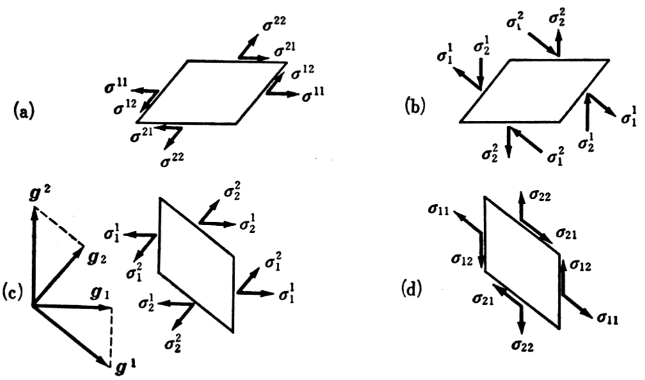
$$d\boldsymbol{A}=dA_i\boldsymbol{g}^i=\boldsymbol{g}_1\times\boldsymbol{g}_2=\epsilon_{123}\boldsymbol{g}^3$$

$$dA_1=dA_2=0, \qquad dA_3=\epsilon_{123}$$

ゆえに今の場合，

$$d\boldsymbol{F}=\sigma^{3j}\epsilon_{123}\boldsymbol{g}_j \qquad (1.5.10\ \mathrm{a})$$

すなわち，応力 σ^{3j} は因子 $\epsilon_{123}=\sqrt{g}$ を除いて考えれば，基底ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ を2辺とする平行四辺形（基底ブロックの一側面）に作用する外力(成分)$d\boldsymbol{F}$ の反変成分であることがわかる．第 23 図(a)は，体積素片の4側面に作用することの種の応力を示す．同様に面積素片の共変成分を用いて，次のように外力の成分を表すこともできる．



第23図 色々なVarianceの応力成分

$$d\boldsymbol{F}=\sigma^{i}_{j}dA_{i}\boldsymbol{g}^{j}=\sigma^{3}_{j}\epsilon_{123}\boldsymbol{g}^{j} \qquad (1.5.10\ \mathrm{b})$$

第 23 図(b)は，この種の応力を示す．

さらに，われわれは反変基底ベクトル $\boldsymbol{g}^1$ 及び $\boldsymbol{g}^2$ によって形成される面積素片を考えることもできる．一般に，

$$d\boldsymbol{F}=\sigma^{j}_{i}dA^{i}\boldsymbol{g}_{j}=\sigma_{ij}dA^{i}\boldsymbol{g}^{j} \qquad (1.5.9\ \mathrm{b})$$

ただし，この場合には，

$$d\boldsymbol{A}=\boldsymbol{g}^{1}\times\boldsymbol{g}^{2}=\epsilon^{123}\boldsymbol{g}_{3},\qquad dA^{1}=dA^{2}=0,\qquad dA^{3}=\epsilon^{123}$$

ゆえに，この場合，

$$d\boldsymbol{F}=\sigma^{j}_{3}\epsilon^{123}\boldsymbol{g}_{j}=\sigma_{3j}\epsilon^{123}\boldsymbol{g}^{j} \qquad (1.5.10\ \mathrm{c,d})$$

第 23 図(c)，(d)は，この種の応力を示す．

第 23 図(b)，(c)の応力は全く別々に定義されたものであるが，その大きさが相等しいことは，注目に価する驚くべき事柄である．また一方，(b)，(c)図において，応力 σ^{1}_{1} 及び σ^{2}_{2} は，体積素片のモーメントの平衡条件に参画する二つの偶力を形成するから，$\sigma^{1}_{2}\neq\sigma^{2}_{1}$ であることも，これらの図から，明確に納得することができる．第 23 図(a)～(d)に示した四つの応力テンソル形態のうち，第 1 のものが最も一般的である．この体積素片は，座標網線の接線である基底ベクトル $\boldsymbol{g}_i$ に沿って，切断して作られたもので，体積素片の側面に作用する外力は，同じ体積素片の側面方向の成分に分解されている．

1.5.2 連続体の力学における構成方程式

連続体の力学での構成方程式については，いずれ章を改めて，第 1.11 章で詳説するが，本節では説明順序の都合上，その概略について述べる．

連続体の力学では，混合変化テンソル以外の場合，歪テンソルも，応力テンソルも，それぞれ六つの独立な成分をもっている．したがって，それらを未知数とする問題を解くためには，いずれの場合でも，六つの条件式が必要となる．その六つの条件式は，次のようである．

(i) 3 個の平衡条件式

物体内部の微小立方体素片に作用する外力の平衡に関する条件式を，平衡条件式というのであるが，微小立方体素片に作用する応力そのもの(すなわち，応力の場所的変化に基づく，応力の微小変化量でないもの)の平衡条件は，初めから当然成立するようにとってあるので，通常，平衡条件式とはいわない．すなわち，通常，平衡条件式というのは，物体内部の微小立方体素片の六つの側面に作用する応力の，場所的変化に関する一次微分について，この微小立方体素片が，剛体として平衡にあるための条件式をいうのである．

動力学では，静的平衡条件式を，剛体に関する Newton の運動法則で置換

えた動的平衡条件式を用いる．静的並びに動的な，仮想仕事の原理（第1.11章参照）も，エネルギー原理による平衡条件式と Hooke's law の一つの変形であって，応力の場所的変化を規定する条件式である．

上述の平衡条件式は，並進的平衡条件式であって，三次元の場合には，3 個の条件式が得られる．微小立方体素片についての，回転的平衡条件式は，並進的平衡条件式に現れる一次微分よりも，常に少なくとも一次以上高次な微小量に関する式となるので，回転的平衡条件式は，応力変化の条件式としては無視して差支えない．

(ii) 3 個の適合条件式

弾性体または塑性体のいずれを問わず，外力によって変形する物体が，その内部に亀裂のような空隙を生ずることなく，連続して変形するために満足すべき，歪テンソルの成分相互間の幾何学的変形関係式を適合条件式という．

共変または反変歪テンソルは 6 個の独立な成分を有するが，これらは，3 個の変位ベクトル成分で表すことができるから，3 個の変位成分で表した 6 個の関係式が得られる．この 6 個の関係式から，3 個の変位成分を消去すれば，ここに，歪成分に関する 3 個の条件式が得られる．これが通常，適合条件式とよばれているものである．

前項で述べた平衡条件式及び，本項の適合条件式は，問題の物体の材質のいかんに関せず常に適用されうるものであることは特に注目に値する．すなわち，等方弾性体，異方弾性体，塑性体のいずれの場合を問わず，常に適用可能である．

(iii) 応力-歪（または，歪速度）間の関係式

元来，平衡条件式は応力成分によって表され，また，適合条件式は歪成分によって表されるものであるが，弾性体の場合には，いわゆる Hooke's law によって歪と応力とは，一次関数の関係にある．この場合の比例係数が弾性率 E である． 弾塑性体の場合には，上記の弾性的応力の外に，さらに通常，歪速度成分に比例する応力成分（粘性応力成分）が加わる．この場合の比例係数が，粘性係数 E' である．

粘性係数 E' は，弾性率 E とは，dimension も異なり，また物理的にも，やがては熱エネルギーとなって消散する運命にある非保存力に対する係数で，弾性率のように，保存力に関する係数ではないので，実用的教科書などで，稀に見かけるように，これら二つの係数の平均値をとるようなやり方は，近似的にも全く無意味であるから，そのようなことをしてはならない．

本項の応力-歪（または歪速度）間の関係式は，すべてで 6 個あって，いずれも，歪，応力共に，そのもの自体の関係式すなわち，それらの場所的変化に関

する微分値間の関係式ではないことに注意する必要がある.

以上が連続体の力学問題に必要な条件式のすべてであるが，さらにこれらの偏微分方程式を積分する場合に，静的な場合には，幾何学的境界条件式 (boundary condition)が必要であり，また動的な場合には幾何学的境界条件式の外に，時間的境界条件式(initial condition)が必要である.

6個の応力成分を未知数として静的問題を解く場合には，3個の適合条件式における歪成分を，第(iii)項の応力-歪間の関係式によってすべて応力成分に書換えて得られる3個の適合条件式と，3個の平衡条件式とから，6個の応力成分を求めればよい．また，6個の歪成分を未知数として静的問題を解く場合には，3個の平衡条件式における応力成分を第(iii)項の応力-歪間の関係式を用いてすべて歪成分に書き直して得られる3個の平衡条件式と，3個の適合条件式とから，6個の歪成分を求めればよい.

静的な場合でもよいが，特に動的な場合には，歪成分をすべて3個の変位成分(u, v, w)で表し，第(iii)項の応力-歪(または，歪速度)間の関係式を，すべて応力成分と，変位成分との関係式に書換えれば，この関係式を適用して，第(i)項の平衡条件式は，3個の変位成分を未知数とする3個の条件式となるから，この連立方程式を解いて，問題を解くことができる．この場合には，3個の変位成分を用いているので，第(ii)項の適合条件式は不要になる.

第1.11章で後述するように，変位場を，変位ポテンシャル関数 ϕ 及び $\boldsymbol{\Psi}$ で表す場合には，これらのスカラー関数 ϕ 及びベクトル関数 $\boldsymbol{\Psi}$ は，結局一つの Galerkin ベクトルとよばれるベクトル関数に統一されるから，やはり，三つの成分が未知関数となる．したがって，上述の場合と同様に，応力成分をすべて，これら三つの未知成分で書換えて後，3個の平衡条件式を三つの未知成分に関する連立方程式とすれば問題を解くことができる．この場合も，上述の場合と同様に適合条件式は不要で，特に動的問題を解く場合に利用される方法である.

これに反して，同じく第1.11章で述べる3個のAiry's stress functionを用いる方法は，すでに，静的平衡条件を満足するように設定された(未知)関数であるから，これを使用するときは，第(iii)項の歪-応力間の関係式を用いて，すべての歪成分を応力成分に書換えて後，3個の適合条件を，3個の Airy の応力関数を未知数とする連立方程式として問題を解けばよい．この場合には改めて，平衡条件式を用いる必要はない．しかしこの方法は静的問題を解く場合に限られ，また変位に関する境界条件を適用する場合に，改めて積分を伴う不利がある.

1.5.3　応力-歪間の弾性関係式(Hooke's law)

われわれはすでに第1.3章で変形関係式を予備的な方法で取扱ったが，これについては後述のベクトル及びテンソルをベクトル的に微分する方法を習得した後に，さらに振返って考究することにする．具体的な平衡条件式も，そのときまで一時おあずけにしておく．しかし応力-歪間の弾性関係式は，本質的には微分的でなく，応力及び歪を定義してしまえば，それを述べる準備はすでに完了しているといえる．

応力-歪間の弾性関係式は材料の力学的性質の数学的記述，すなわち材料の特性方程式である．色々な材料があるのと同様に，色々な応力-歪間の弾性関係式があるが，ここでは，そのうち，二，三のものについて考究することにする．

まず最初に，直線的弾性材料について取扱うことにするが，必ずしも等方材料であることを要しないものとする．そうすると各応力成分 σ^{ij} は，すべての歪成分の一次関数であることになる．すなわち，

$$\sigma^{ij}=E^{ijlm}\varepsilon_{lm} \tag{1.5.11 a}$$

上式はまた，次のように表すこともできる．

$$\varepsilon_{lm}=C_{lmij}\sigma^{ij} \tag{1.5.11 b}$$

通常(1.5.11 a)式のような形の関係式が用いられ，弾性係数(elastic modulus)とよばれているものは，E^{ijlm} を指すのが普通であるが，(1.5.11 b)式のような形式をも併用する場合には，E^{ijlm} を剛直係数(stiffness coefficients)とよび，一方，C_{lmij} を屈従係数(compliance coefficients)とよんで区別している．

実在の弾性体の応力が，Lagrangian description による歪との間で，Hooke's law に従う場合には，この弾性体の応力は，Eulerian description による歪との間では，完全には Hooke's law に従わない．またこの逆の場合も生ずることになる．たとえば円筒空気バネを考えると，空気の圧力 P は，一般気体の $PV=RT$ の法則 (V：体積，T：絶対温度，R：比例係数) に従うから，円筒(断面積 A)の長さ l のとき，全圧力 PA であったものを等温で Δl だけ圧縮すれば，その際の圧力 P' は，

$$P'A(l-\Delta l)=PAl$$

$$\therefore\quad P'=\frac{l}{l-\Delta l}P,\qquad \therefore\quad \Delta P=P'-P=\left(\frac{\Delta l}{l-\Delta l}\right)P$$

となる．すなわち変化圧力 ΔP は，Eulerian description の場合にのみ Hooke's law に従う．

(1.5.11)式は，一般の異方体に対する Hooke's law である．弾性率 E^{ijlm} は

二階の歪テンソルを，二階の応力テンソルに変換するものであるから，四階のテンソルである．E^{ijlm} の上付添字 i, j, l, m はそれぞれ独立に 1, 2, 3 の任意の値をとりうるから，テンソル $[E^{ijlm}]$ には，$3^4=81$ 個の成分があるが，それらはすべてが相異なるわけではない．$\sigma^{ij}=\sigma^{ji}$ なる関係があるから，$E^{ijlm}=E^{jilm}$ であり，また，$\varepsilon_{lm}=\varepsilon_{ml}$ であるから，相等しい各一対の歪成分の σ^{ij} に対する寄与の半分ずつを，それぞれの歪成分に割当てることによって，少なくとも $E^{ijlm}=E^{ijml}$ にとることができる．

したがって，
$$E^{ijlm}=E^{jilm}=E^{jiml}=E^{ijml} \tag{1.5.12}$$
すなわち，i, j 及び l, m の各一対の上付添字では，それぞれの一対内で順序を交換してもよい．(i, j) または (l, m) の各一対では，それぞれ(1,1；1,2；1,3；2,2；2,3；3,3)なる6個の相異なる組が存在するから，結局，最高 $6^2=36$ 個の相異なる E^{ijlm} の値があることがわかる．さらに，歪エネルギーの存在から，弾性率 E^{ijlm} の数は，次に示すようにさらに減少する．

デカルト座標系で，**単位体積当りの**歪エネルギー a は，

$$a=\frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}+\sigma_{zz}\varepsilon_{zz}+2\tau_{xy}\varepsilon_{xy}+2\tau_{yz}\varepsilon_{yz}+2\tau_{zx}\varepsilon_{zx})$$

ゆえに一般の座標系では，歪エネルギー(scalar 量)は次のように表される．

$$a=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}\left(=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon^{ij}=\frac{1}{2}\sigma^j_i\varepsilon^i_j\right) \tag{1.5.13}$$

上式(1.5.13)より，$\sigma^{ij}, \varepsilon_{ij}$ を共に一つの媒介変数の関数と考えれば，形式的に，

$$da=\frac{\partial a}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma^{ij}+\frac{\partial a}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}=\frac{\partial a}{\partial\sigma^{ij}}\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial\varepsilon_{lm}}d\varepsilon_{lm}+\frac{\partial a}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}$$
$$=\frac{\partial a}{\partial\sigma^{lm}}\cdot\frac{\partial\sigma^{lm}}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}+\frac{\partial a}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}$$

(1.5.13)式及び(1.5.11 a)式を上式の a 及び σ^{lm} に代入して，

$$da=\frac{1}{2}(\varepsilon_{lm}E^{lmij}+\sigma^{ij})d\varepsilon_{ij} \tag{1.5.14}$$

ただし，上式においては lm, ij は，それぞれ ml, ji と別なものとし，慣行のように，summation convention をとるものとする．

一方，微小歪増分 $d\varepsilon_{ij}$ の間に，内部応力 σ^{ij} に対してなされる単位体積当りの仕事量，すなわち内部にたくわえられる**単位体積当りの**歪エネルギー a の増分は，一般に，

$$da=\sigma^{ij}d\varepsilon_{ij} \tag{1.5.15}$$

しかるに，$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ji}$ なる関係があるので，個々の $d\varepsilon_{ij}$ は独立な変数増分ではな

いが，ij を一組として扱えば，$(d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ji})$ なる一対は独立な変数増分である．したがって，(1.5.14)式及び(1.5.15)式の右辺は，これらの二つの増分の係数の和毎に，相等しくなければならない．すなわち，

$$\sigma^{ij}+\sigma^{ji}=\frac{1}{2}\{\varepsilon_{lm}(E^{lmij}+E^{lmji})+\sigma^{ij}+\sigma^{ji}\}$$

$$\therefore\quad \sigma^{ij}=\varepsilon_{lm}E^{lmij}$$

上式を(1.5.11 a)式と比較して次式を得る．

$$E^{ijlm}=E^{lmij} \tag{1.5.16}$$

上式(1.5.16)式から(1.5.12)式に示された対称関係のほかに，(i,j) と (l,m) の2組を互いに交換してもよいことがわかる．したがって，この条件から，相異なる E^{ijlm} の数は，36個から21個 $\left(\frac{30}{2}+6=21\right)$ に減少する．その理由は，(1.5.11)式は四階のテンソルと二階のテンソルとの関係式であって，三次元のままでは，平面マトリックスとベクトルの dot product 形式に書き表すことはできないけれども，ε_{ij} 及び σ^{ij} がそれぞれ6元《(1.5.12)における対称性のために9元は6元になる》であることから，六次元の平面マトリックスを採用して，六次元のベクトルとの dot product 形式に書き表しうるからである．(1.5.11 b)式の C_{lmij} を E^{ijlm} から求める場合にも，上述のこの方法が応用できる．すなわち，

$$[ij]=\begin{bmatrix}11 & 12 & 13\\ 21 & 22 & 23\\ 31 & 32 & 33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6 & 5\\ & 2 & 4\\ (\mathrm{SYM}) & & 3\end{bmatrix}$$

$$\text{及び}\quad [lm]=\begin{bmatrix}11 & 12 & 13\\ 21 & 22 & 23\\ 31 & 32 & 33\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6 & 5\\ & 2 & 4\\ (\mathrm{SYM}) & & 3\end{bmatrix}$$

とおき，次の連立方程式が成立する．

$$\begin{Bmatrix}\sigma^1\\ \sigma^2\\ \sigma^3\\ \sigma^4\\ \sigma^5\\ \sigma^6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}E^{11} & E^{12} & E^{13} & E^{14} & E^{15} & E^{16}\\ & E^{22} & E^{23} & E^{24} & E^{25} & E^{26}\\ & & E^{33} & E^{34} & E^{35} & E^{36}\\ & & & E^{44} & E^{45} & E^{46}\\ (\mathrm{SYM}) & & & & E^{55} & E^{56}\\ & & & & & E^{66}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{Bmatrix}$$

したがって，上式を $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_6)$ を未知数とし，$(\sigma^1,\sigma^2,\cdots,\sigma^6)$ を既知数，$(E^{11},E^{12},\cdots,E^{66})$ を既知係数として，解けばよい．

以上は，一般の場合の弾性率について考察したのであるが，次に特別な場合の弾性率について考察するために，その準備として，応力テンソルと歪テンソルの性質について振返ってみよう．

一般に，応力テンソル σ^{ij} は対称テンソルであるから，第1.2章で述べた通り，常に1組の直交する三つの主軸方向(固有ベクトル)を有する．この固有ベクトル方向をもつ面積素片，$d\boldsymbol{A}_{(m)}=dA_{(m)j}\boldsymbol{g}^j$ に作用する力 $d\boldsymbol{F}$ は，

$$d\boldsymbol{F}=\sigma^i_j dA_{(m)i}\boldsymbol{g}^j=\sigma_{(m)}dA_{(m)j}\boldsymbol{g}^j=\sigma_{(m)}d\boldsymbol{A}_{(m)} \qquad (1.5.17)$$

であって，固有ベクトル $d\boldsymbol{A}_{(m)}$ の方向をもっている．したがって主応力 $\sigma_{(m)}$ は，面積素片 $dA_{(m)}$ に垂直な応力で，固有方程式

$$\det(\sigma^i_j-\sigma\delta^i_j)=0$$

$$\text{i.e.,}\quad \det(\sigma^{ij}-\sigma g^{ij})=0 \qquad (1.5.18)$$

の根 σ の一つである．

固有ベクトル $d\boldsymbol{A}_{(m)}$ の絶対値は，面積素片 $d\boldsymbol{A}_{(m)}$ の真面積であるから，主応力 $\sigma_{(m)}$ は，通常の意味での応力値であって，物理量に換算するために因数を乗ずる必要のないものである．

一般の応力場 $\sigma^{ij}(x^k)$ では，主応力方向は，各点毎に次々に連続的に変化するから，われわれは，いたるところで，これらの主応力方向に接する曲線を引くことができる．このような曲線を主応力線とよび，これは三つのパラメータを有する直交曲線網を形成する．われわれは，この主応力線網を，特別な曲線座標系網として用いることができ，この主応力線座標系の基底ベクトル $\boldsymbol{g}_{m'}$ を次のようにして定めることができる．第1.2章7節で述べたように，応力場のある一点で，直交する固有ベクトル $\boldsymbol{A}_{(m)}=A^i_{(m)}\boldsymbol{g}_i$ を，新基底ベクトル $\boldsymbol{g}_{m'}=\beta^i_{m'}\boldsymbol{g}_i$ として用いると，固有ベクトル $\boldsymbol{A}_{(m)}$ の反変成分 $A^i_{(m)}$ は，座標系変換係数 $\beta^i_{m'}$ と同じである．したがって固有ベクトルの直交関係式，$A^i_{(m)}A^j_{(n)}g_{ij}=0\,(m\neq n)$ は次のように表される．

$$\beta^i_{m'}\beta^j_{n'}g_{ij}=g_{m'n'}=0 \qquad (m'\neq n')$$

固有ベクトルの定義，$(\sigma^i_j-\sigma\delta^i_j)\cdot A_i=0$ は，方向のみを決定するものであって，各固有ベクトルの絶対値を定めるものではないから，われわれは，応力場のこの一点で，新基底ベクトル $\boldsymbol{g}_{m'}$ を単位ベクトルにとることができる．このようにすれば，応力場のこの点では，$m'=n'$ のとき，

$$\beta^i_{m'}\beta^j_{n'}g_{ij}=g_{m'n'}=1 \qquad (m'=n')$$

となる．すなわち，応力場のこの点では，$g_{m'n'}=\delta_{m'n'}$ となり，この点での座標系枠は，デカルト座標系となる．このデカルト座標系の3軸の延長であるところの三つの主応力線を単位長毎に区切り，この各区切り点を，新しい出発点とする2本ずつの新しい主応力線を画けば，応力場の全空間を蔽いつくす直交曲線座標系網ができ上り，この曲線座標系網の各点での新基底ベクトルは，この曲線座標系網目の大きさに伴ってその絶対値が変化するベクトルとして定まることになる．一つの固有ベクトルに垂直な（したがって，他の固有ベクトル

に接する）横断面素では，垂直応力すなわち，主応力 $\sigma_{m'm'}$ のみが伝達されることになる.

一方，歪テンソル ε_{ij} もまた，対称テンソルであるから，三つの主軸方向をもっているが，これらの主軸方向を新基底ベクトル $\boldsymbol{g}_{m'}$ とする座標系では，剪断歪テンソル成分，$\varepsilon_{m'n'}(m' \neq n')$ は 0 である．したがって，これらの座標軸は変形後においても，直交のままである（ただし，もちろん剛体回転は存在しうる)．これらの主軸方向を座標軸とする座標系では，局部変形は単に各主軸方向における伸縮だけである.

以上は，一般の連続体の場合，常に成立する事柄であるが，特に，

(i) 等方体の場合

上記の歪テンソルの主軸座標系 $\boldsymbol{g}_{m'}$ は，Hookeの法則によって応力テンソルの主軸座標系 $\boldsymbol{g}_{m'}$ と一致するから(N.B.：異方体の場合には一般に一致しない)，この座標系では，次式が成立する.

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon^{1'}_{1'} &= \frac{1}{E}\sigma^{1'}_{1'} - \frac{\nu}{E}(\sigma^{2'}_{2'} + \sigma^{3'}_{3'}) \\
\varepsilon^{2'}_{2'} &= \frac{1}{E}\sigma^{2'}_{2'} - \frac{\nu}{E}(\sigma^{3'}_{3'} + \sigma^{1'}_{1'}) \\
\varepsilon^{3'}_{3'} &= \frac{1}{E}\sigma^{3'}_{3'} - \frac{\nu}{E}(\sigma^{1'}_{1'} + \sigma^{2'}_{2'})
\end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{aligned}&E : \text{Young's modulus,}\\ &\nu : \text{Poisson's ratio}\end{aligned}\right)$$

$$\varepsilon^{m'}_{n'} = 0, \qquad \sigma^{m'}_{n'} = 0 \qquad (m' \neq n')$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned}
\sigma^{1'}_{1'} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^{1'}_{1'} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon^{m'}_{m'}\right) \\
\sigma^{2'}_{2'} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^{2'}_{2'} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon^{m'}_{m'}\right) \\
\sigma^{3'}_{3'} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^{3'}_{3'} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon^{m'}_{m'}\right)
\end{aligned}\right\}$$

上式の両辺に，それぞれ $\beta^{i}_{1'}\beta^{1'}_{j}$, $\beta^{i}_{2'}\beta^{2'}_{j}$, $\beta^{i}_{3'}\beta^{3'}_{j}$ （$\beta^{i}_{i'}\beta^{i'}_{j} = \delta^{i}_{j}$ であるが，個々の $\beta^{i}_{1'}\beta^{1'}_{j}$, $\beta^{i}_{2'}\beta^{2'}_{j}$, $\beta^{i}_{3'}\beta^{3'}_{j}$ は δ^{i}_{j} に等しくないことに注意）を乗じて辺々相加えれば，次式を得る.

$$\sigma^{i'}_{i'}\beta^{i}_{i'}\beta^{i'}_{j} = \frac{E}{1+\nu}\left\{\varepsilon^{i'}_{i'}\beta^{i}_{i'}\beta^{i'}_{j} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon^{m'}_{m'}(\beta^{i}_{i'}\beta^{i'}_{j})\right\}$$

すなわち，
$$\sigma^{i}_{j} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^{i}_{j} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon^{m'}_{m'}\delta^{i}_{j}\right)$$

ところが $\varepsilon^{m'}_{m'}$ は invariant であるから ε^{m}_{m} に等しい．ゆえに，**等方体の場合，一般の座標系で**次式が成立する.

$$\left.\sigma^{i}_{j} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^{i}_{j} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta^{i}_{j}\varepsilon^{m}_{m}\right)\right\} \tag{1.5.19}$$

$$\text{or}\quad \sigma^{ij}=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}g^{ij}\varepsilon_m^m\right)$$

また，同様にして，次の関係式も得られる.

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_j^i&=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_j^i-\frac{\nu}{E}\sigma_m^m\cdot\delta_j^i\\ \varepsilon_{ij}&=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_m^m\cdot g_{ij}\end{aligned}\right\}\qquad(1.5.20)$$

上の (1.5.19) 式または (1.5.20) 式は，いずれも一般座標系における等方体の Hooke の法則である．特に，デカルト座標系では，(1.5.19)式は，次のようになる.

$$\sigma_{ij}=\frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}+\frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_m^m\right)\qquad(1.5.21)$$

$$=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_m^m$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}2\mu&=2G=\frac{E}{1+\nu}\\ \lambda&=2G\frac{\nu}{1-2\nu}\end{aligned}\right\}\quad(\mu,\lambda:\text{Lame の弾性常数})$$

上式(1.5.21)の i, j にそれぞれ特定の値を代入し，(1.5.11 a)式と比較して，次の関係式を得る.

$$\sigma_{11}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\{(1-\nu)\varepsilon_{11}+\nu(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})\}$$

$$\sigma_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})$$

$$\therefore\quad E^{1111}=E^{2222}=E^{3333}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}=2G\frac{1-\nu}{1-2\nu}=\lambda+2\mu$$

$$E^{1122}=E^{1133}=E^{2211}=E^{2233}=E^{3311}=E^{3322}$$

$$=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}=2G\frac{\nu}{1-2\nu}=\lambda$$

$$E^{1212}=E^{1221}=E^{2112}=E^{2121}=E^{2323}=E^{3131}=\text{etc.}$$

$$=\frac{E}{2(1+\nu)}=G=\mu$$

$$E^{1223}=E^{1112}=E^{1123}=\text{etc.}=0\qquad(1.5.21')$$

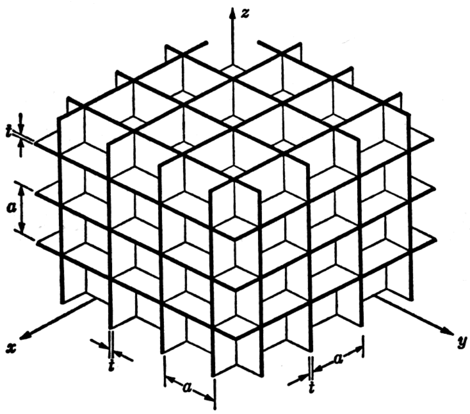
したがってテンソル記法による弾性率と，Young 率及び Poisson 比との上記の諸関係は，次のような代表式にまとめて書くことができる.

$$E^{ijlm}=\lambda\delta^{ij}\delta^{lm}+\mu(\delta^{il}\delta^{jm}+\delta^{im}\delta^{jl})\qquad(1.5.22)$$

上式(1.5.22)は，デカルト座標系の場合にのみ成立する式であるが，(1.5.22)式をさらに一般化すれば，一般座標系で等方体について成立する式として次式を得る.

$$\left.\begin{aligned} E^{ijlm} &= \lambda g^{ij} g^{lm} + \mu (g^{il} g^{jm} + g^{im} g^{jl}) \\ \text{or}\quad E^{ijlm} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{lm} + g^{il} g^{jm} + g^{im} g^{jl} \right) \end{aligned}\right\} \tag{1.5.23}$$

(ii) 理想空隙体(Idealized porous material)の場合



第24図 理想空隙体模型

第 24 図に示すような，理想空隙体について考察してみよう．この理想空隙体は，デカルト座標系 x, y, z の座標面に平行な厚さ $t \ll a$ なる多数の壁で作られているものとする．壁間隔 a は，材料から切取られた体積素片の大きさに比べて，小さいものとし，各壁の内部では平面応力が作用するものとする．たとえば x, y 面に平行な壁の内部では，次式のような平面応力が作用するものとする．

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy} \end{aligned}\right\} \text{(ただし，デカルト座標系とする)} \tag{1.5.24}$$

上式(1.5.24)は，

$$\sigma_{33} = 0 = \frac{E}{1+\nu}\left\{\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon_m^m\right\}$$

なる関係式を用いて，次のように，

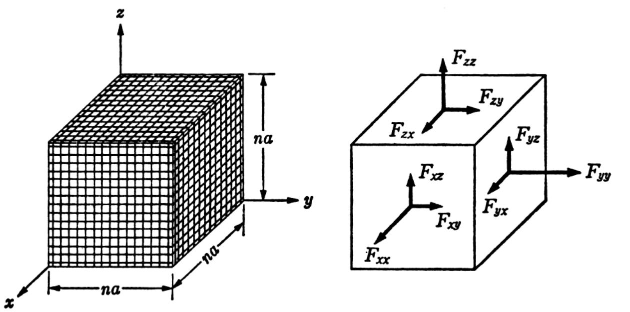
$$\varepsilon_{33} = \frac{-\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

ε_{33} の値を求め，これを(1.5.21)式，

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-2\nu}\delta_{\alpha\beta}\varepsilon_m^m\right)$$

に代入し，ε_{33} を消去して得られた式である．

この理想空隙体の弾性的性質を探究するために，これを数種の単純な歪状態に置いて，第 25 図に示すような $n \gg 1$ なる側長 na の立方体の面に必要な力を



第25図 理想空隙体の体積素片

考えてみる.

まず，最初に，x 方向に単純伸び歪 $\varepsilon_x=\varepsilon_{11}$ を与え，$\varepsilon_y=\varepsilon_z=0$, $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zx}=0$ なる状態を考えてみる. そうすると x=const. なる面で，鉛直壁及び水平壁に応力 σ_x が必要になる. この σ_x を加え合せると，(1.5.24)式により，

$$F_{xx}=2n^2at\sigma_x=2n^2at\cdot\frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_{11}$$

になることがわかる. x 軸に垂直な壁面は無歪，無応力である. y 軸に垂直な断面は，水平壁から(1.5.24)式により，

$$F_{yy}=n^2at\sigma_y=n^2at\frac{E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_{11}$$

なる力の分与を受ける. また z=const. なる面も垂直壁から，上記の力と同じ大きさの力，$F_{zz}=F_{yy}$ の分与を受ける. この場合，剪断力は皆無である.

これらの面を通じて伝達される各力を,これらの面の見掛け面積(gross area) $(na)^2$ で割れば，空隙体における見掛け上の応力(gross stresses)が得られる. 今，見掛け上の応力を $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ なる記号で表すことにすると，上に得た結果から，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}&=\frac{t}{a}\cdot\frac{2E}{1-\nu^2}\varepsilon_{11}\\ \sigma_{22}=\sigma_{33}&=\frac{t}{a}\cdot\frac{E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_{11}\end{aligned}\right\}\qquad(1.5.25)$$

を得る.

さらに，この空隙体を，$\varepsilon_y=\varepsilon_{22}$ または $\varepsilon_z=\varepsilon_{33}$ なる単純伸び歪状態に置いた場合を考えると，上の(1.5.25)式と同様な式が成立する. したがって三方向のすべてに上記の単純伸び歪が加えられた複合伸張歪状態では，(1.5.25)式及びこの式と同様な他の二つの式の三式の linear な重合せの結果，次の応力値が得られる.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11}&=\frac{t}{a}\frac{E}{1-\nu^2}(2\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{33})\\ \sigma_{22}&=\frac{t}{a}\frac{E}{1-\nu^2}(2\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{33}+\nu\varepsilon_{11})\\ \sigma_{33}&=\frac{t}{a}\frac{E}{1-\nu^2}(2\varepsilon_{33}+\nu\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22})\end{aligned}\right\}\quad(1.5.26\ \mathrm{a})$$

次に，この空隙体に xy 平面で，剪断歪 $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{12}$ を加えた場合を考えると，このときは，水平壁面だけが応力状態に置かれ，

$$\tau_{xy}=\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}$$

なる剪断応力が，水平壁面に作用する．

$x=\mathrm{const.}$ なる面及び $y=\mathrm{const.}$ なる面では，上記の剪断応力を加え合せて，次の合力を得る．

$$F_{xy}=F_{yx}=n^2at\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}$$

上記の合力から，次の見掛け上の剪断応力が得られる．

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\frac{t}{a}\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12}=\frac{t}{a}\frac{E}{2(1+\nu)}(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})\quad(1.5.26\ \mathrm{b})$$

同様にして，この空隙体に，剪断歪 $\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{23}$ または $\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{31}$ を加えた場合には，次の見掛け上の剪断応力が得られる．

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{23}=\sigma_{32}&=\frac{t}{a}\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{23}=\frac{t}{a}\frac{E}{2(1+\nu)}(\varepsilon_{23}+\varepsilon_{32})\\ \sigma_{31}=\sigma_{13}&=\frac{t}{a}\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{31}=\frac{t}{a}\frac{E}{2(1+\nu)}(\varepsilon_{31}+\varepsilon_{13})\end{aligned}\right\}\quad(1.5.26\ \mathrm{c})$$

式(1.5.26 a, b, c)は，デカルト座標系における理想空隙体の弾性法則を示すものである．弾性体の一般式(1.5.11 a)式と比較して，この場合には，次の関係式を得る(ただし，剪断弾性率については，工業用剪断歪をとった)．

$$\left.\begin{aligned}E^{1111}=E^{2222}=E^{3333}&=\frac{2E}{1-\nu^2}\cdot\frac{t}{a}\\ E^{1122}=E^{1133}=E^{2233}&=\frac{E\nu}{1-\nu^2}\cdot\frac{t}{a}\\ E^{1212}=E^{2323}=E^{3131}&=\frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{t}{a}\end{aligned}\right\}\quad(1.5.27)$$

上記の三つの数値的に相異なる弾性率は，それらのすべてが，二つのパラメータ E 及び ν に関連しているので互いに独立ではないが，それらの比率は，等方体の対応弾性率比とは全く相違した結果を示す．たとえば，$\nu=0.3$ とすれば，(1.5.27)式は，次の結果を与える．

$$E^{1111}:E^{1122}:E^{1212}=1:0.15:0.175$$

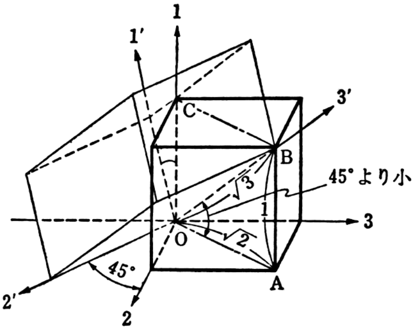
一方，$\nu=0.3$ なる場合，等方体では，(1.5.21′)式から，

$$E^{1111}:E^{1122}:E^{1212}=1:0.428:0.286$$

なる弾性率比が得られる．

上記の結果から，立方空隙を有する理想空隙体は，一軸応力の場合，等方体よりも小さな横縮み (lateral contraction) をもつことがわかる．また，横縮みを防ぐために要する横応力 (transverse stress) は，等方体の場合よりも少なくてよい．またこのような材料は剪断応力において，等方体よりも柔軟であることがわかる．

上記の理想空隙体は，三方向のすべてにおいて，同一寸法 a の空隙をもち，また同一厚さ t の壁面をもっているから，この材料は，三つの座標軸方向のすべてにおいて，同一の弾性的性質を示すけれども，それでもこれは等方体ではない．何となれば，次のように座標軸を回転してみれば，明らかに了解できる．



第26図 デカルト座標系の回転

直交座標軸，x^1, x^2, x^3 が立方体の三辺と一致している状態から出発して，まず三座標軸を，座標軸 x^1 の周りに 45° 回転すれば，座標軸 x^2 は，その最終位置 $x^{2'}$ に来る．このとき座標軸 x^3 は，立方体の底面の対角線 OA の位置をとる．さらに三座標軸を $x^{2'}$ の周りに座標軸 x^3 が，立方体の空間対角線 (space diagonal) OB に一致するところまで回転する．そうすると，この位置で，新座標軸 $x^{3'}$ 及び $x^{1'}$ は，細胞構造の対称面である平面 OABC 上にある．座標系の変換係数は，旧座標軸 x^i と，新座標軸 $x^{i'}$ との間の cosine であるから，この場合の変換係数の数値は，次の通りである．

$$\beta_1^{1'}=\ \ 0.816,\qquad \beta_1^{2'}=\ \ 0,\qquad \beta_1^{3'}=0.577$$
$$\beta_2^{1'}=-0.408,\qquad \beta_2^{2'}=\ \ 0.707,\qquad \beta_2^{3'}=0.577$$
$$\beta_3^{1'}=-0.408,\qquad \beta_3^{2'}=-0.707,\qquad \beta_3^{3'}=0.577$$

上記の諸数値を座標系変換係数の一般公式

$$E^{i'j'k'l'}=E^{ijkl}\beta_i^{i'}\beta_j^{j'}\beta_k^{k'}\beta_l^{l'}$$

に代入し，$E^{i'j'k'l'}$ を計算すれば，次ページの結果を得る．

次表の数値は，応力-歪の関係が，すべての方向では同一でないことを示している．また新座標系面内の剪断弾性係数も相等しくない．剪断歪 $\varepsilon_{1'2'}$ は剪断応力 $\sigma^{1'2'}$ を生じるだけでなく，剪断応力 $\sigma^{2'3'}$ をも発生させる．第 26 図では，

$k'l'$ \ $i'j'$	1′1′	2′2′	3′3′	1′2′	2′3′	3′1′
1′1′	1.500	0.467	0.633	0	0	0.236
2′2′		1.500	0.633	0	0	−0.236
3′3′			1.333	0	0	0
1′2′	(SYM)			0.517	−0.236	0
2′3′					0.683	0
3′1′						0.683

平面1′O3′に関して対称であるから，剪断応力$\sigma^{3'1'}$(座標軸$x^{2'}$の周りのモーメントに関係を有する)は，他の剪断応力(座標軸 $x^{3'}$ または $x^{1'}$ の周りのモーメントに関係をもつ)を発生させることはない．しかし縦歪$\varepsilon_{1'1'}$及び$\varepsilon_{2'2'}$は，剪断応力$\sigma^{3'1'}=\sigma^{1'3'}$を発生させる(N.B.：座標軸$x^{1'}$は$x^{3'}$と異なり，cell の space diagonal の方向ではない)．

以上，デカルト座標系で理想空隙体の弾性的性質について，考察を行ったが，これと同様な事柄は，連続体の力学を，有限要素法のように，節点のみが接続し，その他の縁辺では互いに遊離した，多数の有限要素に分割して解析する場合にもいえることで，もし，各有限要素を規則正しい，長方形要素としたり，また，切欠き部分などの周辺において，他の部分よりも，細かい有限要素に細分したりするならば，前者では，異方体的性質の材料を考えている結果を招来し，また，後者では，切欠き部分の近傍で，特に弾性率の高い材料を考えている結果を招くことは，想像に難くない．

1.5.4 等方応力，等方歪，偏差応力，偏差歪

一般座標系で，混合変化応力テンソル及び混合変化歪テンソルは，次の形式に書き表すことができる．

$$\begin{bmatrix}\sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \sigma_3^1\\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2\\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \sigma_3^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\sigma_m^m & & 0\\ & \frac{1}{3}\sigma_m^m & \\ 0 & & \frac{1}{3}\sigma_m^m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\left(\sigma_1^1-\frac{1}{3}\sigma_m^m\right) & \sigma_2^1 & \sigma_3^1\\ \sigma_1^2 & \left(\sigma_2^2-\frac{1}{3}\sigma_m^m\right) & \sigma_3^2\\ \sigma_1^3 & \sigma_2^3 & \left(\sigma_3^3-\frac{1}{3}\sigma_m^m\right)\end{bmatrix} \quad (1.5.28)$$

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\varepsilon_m^m & & 0 \\ & \frac{1}{3}\varepsilon_m^m & \\ 0 & & \frac{1}{3}\varepsilon_m^m \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix} \left(\varepsilon_1^1 - \frac{1}{3}\varepsilon_m^m\right) & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^2 & \left(\varepsilon_2^2 - \frac{1}{3}\varepsilon_m^m\right) & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \left(\varepsilon_3^3 - \frac{1}{3}\varepsilon_m^m\right) \end{bmatrix} \tag{1.5.29}
$$

上式（1.5.28）及び（1.5.29）において，右辺の第1項をそれぞれ**等方応力**(**isotropic stress**)及び**等方歪**(**isotropic strain**）とよび，また，右辺の第2項をそれぞれ**偏差応力**（**deviatric stress**）及び**偏差歪**（**deviatric strain**）とよぶ．

いま，等方応力及び等方歪をそれぞれ，s 及び e とおけば，

$$
3s = \sigma_m^m, \qquad 3e = \varepsilon_m^m \tag{1.5.30 a, b}
$$

また，偏差応力及び偏差歪をそれぞれ，s_j^i, e_j^i とおけば，

$$
s_j^i = \sigma_j^i - s\delta_j^i, \qquad e_j^i = \varepsilon_j^i - e\delta_j^i \tag{1.5.31 a, b}
$$

上記の記号を導入すれば，(1.5.19)式及び(1.5.20)の第1式は，それぞれ，次のように表される．

$$
s = \left(\frac{E}{1-2\nu}\right)e \quad \text{or} \quad e = \left(\frac{1-2\nu}{E}\right)s \tag{1.5.32}
$$

及び

$$
s_j^i = \left(\frac{E}{1+\nu}\right)e_j^i \quad \text{or} \quad e_j^i = \left(\frac{1+\nu}{E}\right)s_j^i \tag{1.5.33}
$$

また，

$$
\left.\begin{aligned} s_i^i &= \sigma_i^i - s\delta_i^i = 3s - 3s = 0 \\ e_i^i &= \varepsilon_i^i - e\delta_i^i = 3e - 3e = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.5.34}
$$

$3e = \varepsilon_m^m = \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3$ は体積膨張率を表している．したがって，(1.5.32)式は，体積の弾性変化率が，等方応力（静水圧応力）のみに関連し，かつそれに比例することを示すものである．換言すれば等方応力は，体積の弾性変化率に比例することを示している．この比例係数 K は体積弾性率とよばれ，次の値を有する．

$$
s = \frac{E}{3(1-2\nu)} 3e = K \cdot \varepsilon_m^m
$$

$$
\therefore \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{1.5.35}
$$

さらに(1.5.34)式は $[e_j^i]$ が，体積変化(dilatation)を伴わない形だけの変形，(distortion) を表すことを示している．これに反して(1.5.32) 式は，形の変化

を伴わない体積変化を表すものということができる.

(1.5.32)式及び(1.5.33)式はまたLameの弾性常数を用いれば，次のように書くこともできる.

$$s=(3\lambda+2\mu)e \qquad \left(\lambda=2G\frac{\nu}{1-2\nu},\ \mu=G\right) \tag{1.5.36 a}$$

$$s_j^i=2\mu e_j^i \tag{1.5.36 b}$$

ただし，応力テンソル及び歪テンソルは，すべて対称テンソルであるが，デカルト座標系以外の場合には，一般に，$s_j^i \neq s_i^j$であり，また，個々のs_j^i，たとえば，s_2^1は，$s_2^1 g^{22} \neq s^{12}=s^{21}=s_i^1 g^{i2}=s_j^2 g^{j1}$であることに注意しておく必要がある.

1.5.5　粘性流体と粘弾性体(Visco-elastic material)との関係

まず粘性流体について考察してみよう．粘性流体は，その内部応力の一部分が，歪の時間微分，すなわち，歪速度に関連するという特徴をもつものである．すなわち，

$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}, \qquad \dot{\varepsilon}_j^i=\frac{\partial \varepsilon_j^i}{\partial t}, \qquad e=\frac{\partial e}{\partial t}, \qquad \dot{e}_j^i=\frac{\partial e_j^i}{\partial t}$$

と記することにすれば，等方粘性流体の場合には，(1.5.32)式，及び(1.5.33)式の歪を，単に歪速度に置き換えて，次式が得られる.

$$s'=\frac{E'}{1-2\nu'}\dot{e} \tag{1.5.37 a}$$

$$s'^i_j=\frac{E'}{1+\nu'}\dot{e}_j^i=2G'\dot{e}_j^i \tag{1.5.37 b}$$

ただし，E', ν', G'：それぞれ Young, Poisson 及び剪断の粘性係数
s', s'^i_j：それぞれ粘性に起因する等方応力及び偏差応力

上記(1.5.37 a)式は，体積変化の粘性を示す式であり，(1.5.37 b)は変形の粘性を示す式である.

粘弾性固体中での全等方応力Sは，(1.5.32)式と，(1.5.37 a)式との和より成り，またその全偏差応力S_j^iは(1.5.33)式と(1.5.37 b)式との和より成る．すなわち，

$$S=s+s'$$

$$S_j^i=s_j^i+s'^i_j$$

一般に流体は(1.5.33)式で，$2G=\dfrac{E}{1+\nu}=0(\because\ E\doteq 0)$なる特性を有するということで，固体と区別されるものであるが，この流体のうち，常に，

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=2G\frac{\nu}{1-2\nu}=\infty \quad \text{i.e.,}\ \ \nu=0.5\\ &\langle\langle (1-2\nu)\text{は}E\text{よりも高位の無限小}\rangle\rangle\\ &e=0, \qquad \dot{e}=0, \qquad E'\neq 0\end{aligned}\right\} \tag{1.5.38}$$

なる特性を有するものを，非圧縮性の流体とよんでいる．したがって非圧縮性粘性流体では，等方応力 s は，(1.5.32)式

$$s=\frac{E}{(1-2\nu)}e=\infty\cdot 0$$

からわかるように，独立に任意の有限値をとることができ，また，偏差応力 s^i_j は，(1.5.33)式から，常に0であり，さらに s'^i_j は，(1.5.37 b)式から，$\dot{e}^i_j$ と共に変化することがわかる．すなわち非圧縮性粘性流体では，

$$\left.\begin{aligned} &S=s \\ &S^i_j=0+s'^i_j=2G'\dot{e}^i_j \end{aligned}\right\} \qquad (1.5.39)$$

ただし，s'^i_j のなかには，見掛け上，垂直粘性応力 $\delta^j_i s'^i_j$ も含まれているが，これは，座標軸を回転した場合に考えられる純剪断粘性応力に起因するものである．

上記，(1.5.39)式の e^i_j は，問題にしている点の，spatial coordinates (x^i) の関数であるから，時間 t の関数でもある．

気体以外の現存する流体はほぼ(1.5.39)式に従うものであるが，上の概念からさらに，圧縮性粘弾性等方材料の一般式を誘導することができる．すなわち，圧縮性粘弾性等方材料では，一般に，次式が成立する．

$$\left.\begin{aligned} &S=s+s'+s''+\cdots=pe+p_1\frac{\partial e}{\partial t}+p_2\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}+\cdots=\sum_k p_k\frac{\partial^k e}{\partial t^k} \\ &S^i_j=s^i_j+s'^i_j+s''^i_j+\cdots=qe^i_j+q_1\frac{\partial e^i_j}{\partial t}+q_2\frac{\partial^2 e^i_j}{\partial t^2}+\cdots=\sum_k q_k\frac{\partial^k e^i_j}{\partial t^k} \end{aligned}\right\} \qquad (1.5.40)$$

ただし，　i, j：テンソルの添字指標，k ：k 次微分の次数 k を示す，
$p, p_1, p_2, \cdots$：体積弾性，体積変化速度，体積変化加速度，
…に関する係数，$q, q_1, q_2, \cdots$：変形(剪断)弾性，変形速度，
変形加速度，…に関する係数

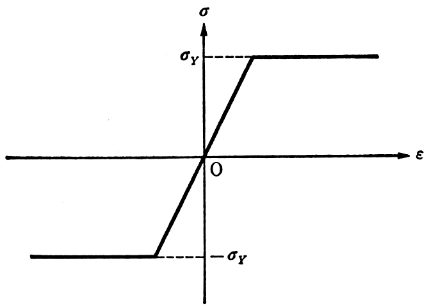
また，気体などの場合には，初めから存在する応力(圧力)は S 中に含まず，S はもっぱら変化応力(圧力)のみを意味することに注意する必要がある．

1.5.6 理想弾塑性体及び材料破壊の説

単軸引張試験で，応力と歪との関係が，次の規則に従う有限弾性材料を，理想弾塑性体(idealized elasto-plastic material)または完全弾塑性体という．すなわち，

1) 応力 $\sigma<\sigma_Y$(降伏応力)なる範囲では，Hooke's law $\sigma=E\varepsilon$ に従うこと．
2) 降伏応力 σ_Y で，歪は歪速度 $\dfrac{d\varepsilon}{dt}(>0)$ に拘束されることなく，不定的に増加しうること．

3) 応力は降伏応力，σ_Yを超えて増加しえないこと《σ_Yに対応する歪以上の増加歪に対しては，$E=0(G=0), E'=0(G'=0)$》.



第27図 理想弾塑性体における一軸応力と歪の関係

上記，三つの構成規則を図に画けば，第27図の通りである.

上述の事柄は単軸試験のような単軸応力の場合のことであって，仮に理想塑性体であっても，二次元，または三次元応力の場合には，単軸試験の場合とは様相が大きく異なることは想像に難くない．さらに小さな試験片を一様な応力状態に置いた場合と，構造物部材などのように，各部分で応力状態が異なる場合とでは，或る点で同一の応力状態にあっても，同一応力値で破壊が始まるとは限らない．たとえば，構造物の隅角部分や切欠き部分などの角張った点は，特異点であって，凹形の角張った点では弾性理論上では，応力値が∞となるいわゆる，極点(pole)である．したがって，実在の構造物材料では，この点付近のきわめて限られた部分では，許容荷重以内でも，応力はすでに弾性限界を突破しているはずであるが，このように応力が弾性限界を大きく突破していても，その範囲が針でつついたように小部分である間は，この構造物材料は亀裂を発生することがないか，または仮に，毛細的亀裂を発生していても，これが進行することのないことは，実在の構造物で常に見掛ける事柄である.

そもそも，どのような現象をもって，物体の破壊というかということは，きわめて曖昧で，これについて完全な定義を下すことは困難である．一軸応力状態だけでも，理想塑性体に近い軟鋼で作られた試験片では，通常，断面に作用する一様な応力が，降伏点に達して，永久歪が生じたときに，弾性的破損が生じたものとするが，鋳鉄のように，明確な降伏点をもたない脆い物体（理想塑性体から遠い物体）で作られた試験片では，機械的亀裂を生じたときに，弾性的破損が生じたものとする.

また，試験片のように，一様な応力状態に置かれたものでなく，構造物部材のように部分的に異なる応力状態にある実在構造物では，部分的に永久歪を生じていて，仮にそれが或る部分の全横断面にわたる相当広範囲のものであっても，必ずしも破壊とは考えず，その構造物が，実際の使用目的を果たしえないまでに変形が進行増大して，はじめて破壊と考える．すなわち，変形が進行することなく，構造物が実際の使用目的を十分果たしうる間は，破壊とは考えな

いのである(極限設計).

さらに，上記のように，静的な場合とは別に，動的な場合には，たとえ，応力がきわめて微小時間，静的破壊応力を突破しても材料の破壊は生ぜず，材料が破壊するためには，破壊応力が一定時間以上継続することを必要とする説とか，または，材料の弾性疲労とは別に N_r を，応力振幅 $\pm s_r$ の実振動数とし，N_{rf} を，応力振幅 $\pm s_r$ が単独で，破壊を生ずる場合の振動数とするとき，この応力振幅 $\pm s_r$ で，材料が実際に蒙る損傷の比率は N_r/N_{rf} であると考え，したがって，応力振幅 $\pm s_1$ のものの N_1 cycle の後に，応力振幅 $\pm s_2$ のものの N_2 cycle が続き，さらに，応力振幅 $\pm s_3$ のものの N_3 cycle が続くといった具合いに，次々に異なる応力振幅のものがそれぞれの cycle 数だけ続く一連の振動現象では，

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{N_r}{N_{rf}}=1$$

となるときに破壊を生ずると考える実用基準(Miner's criterion)など，材料破壊説としても，静的と動的とでは，破壊説は一般に区別される．

しかし，ここでは弾性材料破壊説を静的破壊説に限定することとし，かつ破壊の概念も，構造物に関する破壊の概念ではなく，一様な応力下にある試験片(ただし，3軸応力状態を考える)における弾性的破損の概念に限定して，以下，破壊に関する諸学説中，現今，通常の構造用材について，一般に有力と目されている二，三の学説を掲げることにする．

(i) 最大剪断応力破壊説

軟鋼の単軸引張供試体や，コンクリート・モルタル単軸圧縮供試体，または鋼円板単軸圧縮試験片などが，単軸引張または単軸圧縮方向と約 45° の傾斜をなす線によって作られる面に沿って破壊するのは，物体の内部が，最大剪断内力(偏差内力)のために辷りを生じて，破損をきたすためであるという学説である．この場合，最大剪断応力としては，現象を三次元的に考えると，主剪断応力(後述)をとらなければならない．

この学説では，材料の破壊が，単に主剪断応力の値のみによって決定され，応力テンソルの他の成分の値いかんには無関係であるということになる．しかし材料に等方応力が作用する場合，剪断応力は皆無であるが，もし，この等方応力が等方引張応力である場合には，応力強度がある限界に達すれば，明らかに破壊が生ずるという事実が含まれていない．また等方圧縮応力にしても，際限なく大きな応力に耐えられるとは考えにくい．このように垂直応力成分に対する基準を欠いている点が，この説の欠陥であるが，もしこの説が事実であるとすれば，光弾性実験によって得られる縞模様は，平面応力場における主応力

差，すなわち最大剪断応力の等高線縞模様であるから，光弾性実験結果は，そのまま，平面板内の各点の危険度を明示するものということができる．

(ii) 最大弾性歪エネルギー不変説

物体がいかなる内力状態に置かれても，弾性的破損を呈するときは，その内部に蓄えられる弾性歪エネルギーの量は，常に一定不変であるというのが，この学説の眼目である．

今，物体内の一点に作用する3個の主応力及びそれによって生ずる主歪をそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 及び $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ とすれば，この点における物体の単位体積中に蓄えられる歪エネルギーの量 (以下，これを単に，歪エネルギー密度ということにする) a は，等方体では，

$$a=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}(\sigma^{11}\varepsilon_{11}+\sigma^{22}\varepsilon_{22}+\sigma^{33}\varepsilon_{33}+2\sigma^{12}\varepsilon_{12}+2\sigma^{23}\varepsilon_{23}+2\sigma^{31}\varepsilon_{31})$$

したがってデカルト座標系では，

$$\text{上式}=\frac{1}{2E}\{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2+\sigma_z{}^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\}$$

$$+\frac{1}{2G}(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2)$$

$$=\frac{1}{2E}\{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\} \qquad (1.5.41\ \mathrm{a})$$

または，同様に，デカルト座標系では，

$$a=G\left\{\varepsilon_x{}^2+\varepsilon_y{}^2+\varepsilon_z{}^2+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2+2(\varepsilon_{xy}{}^2+\varepsilon_{yz}{}^2+\varepsilon_{zx}{}^2)\right\}$$

$$=G\left\{\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2+\varepsilon_3{}^2+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2\right\} \qquad (1.5.41\ \mathrm{b})$$

ただし，上記(1.5.41)式における上付添字は，羃数を示すものとする．

この学説に従えば，弾性的破損をきたすときの a の値は，応力状態のいかんにかかわらず常に一定であるということになる．

ゆえに，物体に弾性的破損を与える単軸応力の大きさを K とすれば，K に相当する弾性歪エネルギー密度は $(1/2E)K^2$ であるから，この物体に作用する応力成分の関係が，次式を満たす間は，弾性的破損の現象は現れないということになる．

$$\frac{1}{2E}\{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\}<\frac{1}{2E}K^2 \qquad (\text{ただし，}K>0)$$

$$\text{i.e.,}\quad \sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)<K^2$$

上式を弾性的破損限界の等式に改め，三つの主応力を座標軸とするデカルト座標系空間内で，物体中の各点の主応力を，デカルト座標系空間の一点の座標に

対応させて図を画くことにすれば，本説の弾性的破損の限界式は，

$$\{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\}\cdot\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{Bmatrix}=K^2 \qquad (1.5.42)$$

なるデカルト座標系における二次形式で表されることとなり，物体中の諸点の主応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ は，デカルト座標系空間中の，位置ベクトルとして示されることとなる．かつ(1.5.42)式の左辺は，テンソル

$$\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix} \qquad (1.5.43)$$

を仮に，応力テンソルに見立てれば，ベクトル $\{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\}$ を法線とする面積 $\boldsymbol{A}$ に作用する合応力，

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{Bmatrix}$$

と，ベクトル $\{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\}$ とのdot product，すなわち面積 $\boldsymbol{A}=\{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\}$ に作用する合応力 $\boldsymbol{F}$ の，作用面 A に垂直な成分を表す．また，(1.5.42)式は，この合応力 $\boldsymbol{F}$ の垂直成分が，位置ベクトル $\{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\}$ に無関係に，常に一定値 K^2 であることを表し，位置ベクトル $\{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\}$ の先端は，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ をそれぞれ x, y, z 座標軸とするデカルト座標系空間内で，一つの二次曲面を表すことを示している．第 1.2. 8節で述べたように，この二次曲面を標準形に直すために，テンソル(1.5.43)式の固有方程式を求めると，

$$\begin{vmatrix}(1-\lambda) & -\nu & -\nu\\ -\nu & (1-\lambda) & -\nu\\ -\nu & -\nu & (1-\lambda)\end{vmatrix}=0$$

$$\text{i.e.,}\quad (1-\lambda)^3-3\nu^2(1-\lambda)-2\nu^3=0$$

ゆえに，この場合の固有値は，$\lambda_{(1)}=(1-2\nu)$，$\lambda_{(2),(3)}=(1+\nu)$ である．

これらの固有値はすべて正であるから（$\because\ \ 0.5>\nu>0$），二次形式 (1.5.42)式は，楕円体面を表している．この楕円体面の主軸(固有ベクトル)方向を座標軸とする新しいデカルト座標系 $(x'\ y'\ z')$ に，座標系を変換すれば，(1.5.42)式は，次のように，対角形に表される．

$$\{x'\ y'\ z'\}\cdot\begin{bmatrix}(1-2\nu) & & 0\\ & (1+\nu) & \\ 0 & & (1+\nu)\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{Bmatrix}=K^2$$

$$\text{i.e.,}\quad (1-2\nu)(x')^2+(1+\nu)(y')^2+(1+\nu)(z')^2=K^2$$

$$\therefore\quad \frac{(x')^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{1-2\nu}}\right)^2}+\frac{(y')^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{1+\nu}}\right)^2}+\frac{(z')^2}{\left(\frac{K}{\sqrt{1+\nu}}\right)^2}=1 \qquad (1.5.44)$$

すなわち，この楕円体面の主軸の半軸長は，それぞれ $K/\sqrt{1-2\nu}$, $K/\sqrt{1+\nu}$, $K/\sqrt{1+\nu}$ であって，かつ $(x')^2+(y')^2+(z')^2=(\sigma_1)^2+(\sigma_2)^2+(\sigma_3)^2$ であることがわかる．ただし，上式で丸括弧の右肩の上付添字は，すべて羃数を示すものとする．

したがって，本学説では，物体が弾性的破損をきたさないためには，応力テンソルを，三つの主応力を座標成分とするデカルト座標系の座標点で表すとき，その座標点が，一定の楕円体曲面で限られた内部に落ちることが必要であるということになる．この楕円体は，$\nu\to0.5$ なる極限では，一つの主軸長が∞となり，楕円体は円筒に変り，一つの主応力限界は無限大となる．

現在では，上記の最大歪エネルギー破壊説に改変を加えた R. V. Mises の材料降伏説が有力視されている．そこで R. V. Mises の材料降伏説について述べることにする．(1.5.31)式から，

$$\left.\begin{aligned}\sigma^i_j&=s\delta^i_j+s^i_j\\ \varepsilon^i_j&=e\delta^i_j+e^i_j\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}\sigma^{ij}&=sg^{ij}+s^{ij}\\ \varepsilon_{ij}&=eg_{ij}+e_{ij}\end{aligned}\right\}$$

したがって，上式を内部歪エネルギーの式 $a=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}$ に代入すれば，次式が得られる．

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{2}(sg^{ij}+s^{ij})(eg_{ij}+e_{ij})\\ &=\frac{1}{2}(se\delta^i_i+se^i_i+s^i_ie+s^{ij}e_{ij})\end{aligned}$$

ところが，　$\delta^i_i=3,\quad e^i_i=\varepsilon^i_i-e\delta^i_i=0,\quad s^i_i=\sigma^i_i-s\delta^i_i=0$

$$\therefore\quad \text{上式}=\frac{1}{2}(3se+s^{ij}e_{ij}) \qquad (1.5.45)$$

(1.5.33)式を上式に代入して，等方体について，次式が得られる．

$$a=\frac{3}{2}\cdot\frac{E}{(1-2\nu)}\cdot e\cdot e+\frac{E}{2(1+\nu)}e^{ij}e_{ij} \qquad (1.5.46\ \text{a})$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{(1-2\nu)}{E}\cdot s\cdot s+\frac{(1+\nu)}{2E}s^{ij}s_{ij} \qquad (1.5.46\ \text{b})$$

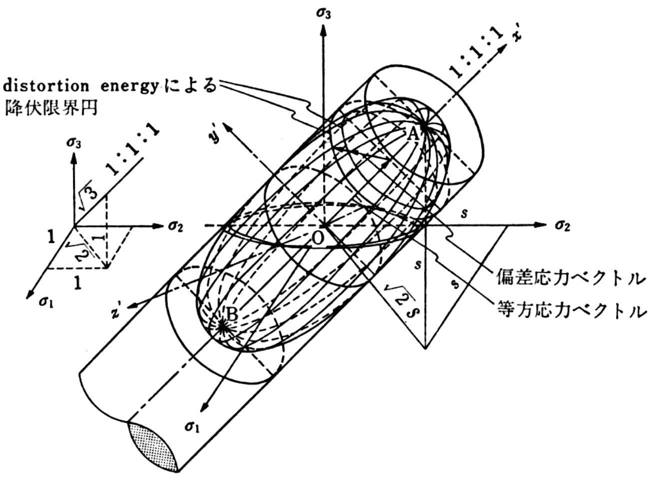
上式の第1項は，完全に体積変化に依存し，第2項は純変形に依存している．これらのエネルギーはそれぞれ dilatation energy 及び distortion energy とよばれている．

固体材料の塑性流動状態では，実際に体積の永久歪は進行せず，変形歪のみが進行する事実から，R.V.Mises は脆性降伏でない塑性降伏のような弾性破損は，全く偏差応力に基づくと考え，distortion energy の限界と，dilatation energy の限界とを，それぞれ別々に設定することを提案している．

dilatation energy の限界を $k_{(1)}{}^2$ ($k_{(1)}>0$ とする) とすれば，dilatation energy によって破損しないための条件は，(1.5.46 b)式から，

$$\frac{3(1-2\nu)}{2E}s\cdot s<k_{(1)}{}^2 \tag{1.5.47}$$

で与えられる(ただし，$k_{(1)}$ の上付添字 2 は，2 乗の冪数を示すものとする)．したがって，三つの主応力を座標軸とするデカルト座標系における dilatation の破損限界は，s がこの場合，等方(主)応力であるから，第 28 図のように，原点Oを通る方向係数 ($1/\sqrt{3}$，$1/\sqrt{3}$，$1/\sqrt{3}$) なる直線上で，原点Oからの距離 $l=\pm k_{(1)}\sqrt{2E/(1-2\nu)}$ 以内であるような線分 $\overline{\mathrm{AB}}$ によって示されることになる．



第28図　最大歪エネルギー楕円体破損曲面及びMisesの円筒破損面

次に distortion energy の限界を $k_{(2)}{}^2$ とすれば，distortion energy によって降伏しないための条件は，(1.5.46 b)式から，

$$\frac{(1+\nu)}{2E}s^{ij}s_{ij}<k_{(2)}{}^2 \tag{1.5.48}$$

$$\text{i.e.,}\quad s^i_j\cdot s^j_i<4Gk_{(2)}{}^2$$

で表される(ただし，$k_{(2)}$ の上付添字 2 は，2 乗の冪数を示すものとする)．上式を等号で書き換え，偏差応力テンソルを三つの偏差主応力で示せば，降伏限

界条件として，

$$(s_1^1)^2+(s_2^2)^2+(s_3^3)^2+2(s_2^1s_1^2+s_3^2s_2^3+2s_1^3s_3^1)=4Gk_{(2)}^2$$

から，

$$(s_1)^2+(s_2)^2+(s_3)^2=4Gk_{(2)}^2 \tag{1.5.49}$$

を得る《ただし，(s_1), (s_2), (s_3) は直交する偏差主応力を示し，上式の左辺の丸括弧及び右辺 $k_{(2)}$ の右肩の上付添字2は2乗の羃数を示すものとする》．

今，dilatation energy の場合と同様に，三つの偏差主応力，s_1, s_2, s_3 を座標軸 x, y, z とするデカルト座標系を考えれば，(1.5.49)式は，半径 $2\sqrt{G}k_{(2)}$ なる球面を表すことになる．また s_1, s_2, s_3 は，この場合，偏差主応力であるから，(1.5.49)式の外に，

$$s_1+s_2+s_3=0 \tag{1.5.50}$$

なる条件を満足しなければならない．この条件は，s_1, s_2, s_3 を座標軸とする上記のデカルト座標系内において，方向余弦 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ なる法線を有し，かつ原点Oを通る平面の方程式である．したがって，(1.5.49)式及び(1.5.50)式の二つの条件から定まる降伏限界範囲は，(1.5.49)式が示す球面と(1.5.50)式が示す平面との交線で作られる円板内であることになる．

さらに，上記(1.5.49)式及び(1.5.50)式の結果と，前述の(1.5.47)式の条件とを総合すれば，R.V.Mises による材料の破壊限界範囲は，主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を座標軸とするデカルト座標系内において，第28図のように，線分 $\overline{AB}$ を中心軸とし，半径 $2\sqrt{G}k_{(2)}$ なる直円筒で示されることになる．

一方，本項の前段で述べた，歪エネルギー全体を，一体としてまとめて考える総合的最大歪エネルギー破壊説では，その破壊限界は前述のように，主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を座標軸とするデカルト座標系内で，方向係数 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ なる直線《これはテンソル(1.5.43)の一つの固有ベクトルである》を回転軸とし，この回転軸上で，半軸長，$K\cdot\sqrt{1/(1-2\nu)}$ をもち，他の二つの直交半軸長として，座標原点を通り，回転軸に直交する相等しい半軸長 $K\cdot\sqrt{1/(1+\nu)}$ を有する回転楕円体として表される．

したがって，本項後段の R.V.Mises の説では，dilatation energy の限界 $k_{(1)}^2$ と distortion energy の限界 $k_{(2)}^2$ とを互いに独立なものとして考えているのに反し，本項前段の総合的最大歪エネルギー説では，distortion energy の限界，すなわち，方向係数$(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$なる直線に垂直な円板の半径をこの直線上の点の位置，すなわち dilatation energy の大きさに応じて変化させて考えていることになる．この場合，総合的最大歪エネルギー説と R.V. Mises の説の双方が，少なくとも，純等方応力による破損限界及び純偏差応力

による降伏限界において，共に正しいものとすれば，これらの限界は，両説で実際上，一致すべきであるから，上記の事柄と，(1.5.47)式及び(1.5.49)式から，次の関係式が得られる.

$$\left.\begin{array}{l} K\sqrt{\dfrac{1}{(1-2\nu)}}=\sqrt{3}\left(k_{(1)}\sqrt{\dfrac{2E}{3(1-2\nu)}}\right)\equiv k_{(1)}\sqrt{\dfrac{2E}{(1-2\nu)}} \\ K\sqrt{\dfrac{1}{(1+\nu)}}=2\sqrt{G}\,k_{(2)}\equiv k_{(2)}\sqrt{\dfrac{2E}{(1+\nu)}} \end{array}\right\}$$

$$\therefore\quad K=\sqrt{2E}\,k_{(1)},\qquad K=\sqrt{2E}\,k_{(2)},\qquad k_{(1)}=k_{(2)}\qquad (1.5.51)$$

しかしながら，上式は破壊に対する総合歪エネルギーが，一軸応力Kの場合の歪エネルギーに等しいものとし，純等方応力または純偏差応力の絶対値が，両説で一致すべきことを前提として，算出した結果である．もし，総合最大歪エネルギー説を，一軸応力の場合だけでも正しいものと考えず，これとは無関係に，R.V.Mises の説を単独に正しいものとすれば，単軸載荷試験の場合の，等方応力に対する破損限界及び偏差応力に対する降伏限界は，(1.5.47)式及び(1.5.49)式からそれぞれ次のようになる.

$$\left(\frac{K'}{3}\right)^2=k_{(1)}{}^2\frac{2E}{3(1-2\nu)}$$

$$\therefore\quad K'=\pm k_{(1)}\sqrt{\frac{6E}{1-2\nu}}\qquad \text{(等方応力に基づく限界)}\qquad (1.5.52)$$

及び

$$\left(\frac{2K'}{3}\right)^2+\left(-\frac{K'}{3}\right)^2+\left(-\frac{K'}{3}\right)^2=4Gk_{(2)}{}^2$$

$$\therefore\quad \frac{6}{9}(K')^2=4Gk_{(2)}{}^2$$

$$\text{i.e.,}\quad K'=\pm k_{(2)}\sqrt{6G}\equiv\pm k_{(2)}\sqrt{\frac{3E}{1+\nu}}\qquad \text{(偏差応力に基づく限界)}$$

$$(1.5.53)$$

《ただし，K'：単軸応力の絶対値(Mises の説単独の場合)とする》

すなわち，この場合，単軸応力の絶対値 K' は，(1.5.52)式及び(1.5.53)式の小さいほうの値によって規制されるから，もし，$k_{(1)}=k_{(2)}$とすれば，結局，この場合，単軸応力の大きさ K' は，(1.5.53)式によって，律せられることになるはずである.

さらに，二次元単純剪断，

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の場合には，偏差主応力の一つを σ_1 と書けば，Mohr の円からわかるように，

他の偏差主応力は $-\sigma_1$ であって，上記の応力テンソルは，

$$\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & -\sigma_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

と書きうるから，R. V. Mises の降伏限界を与える式(1.5.49)式は，

$$2(\sigma_1)^2=4Gk_{(2)}^2$$

$$\therefore\quad \sigma_1=(\tau_{xy})=k_{(2)}\sqrt{2G}=k_{(2)}\sqrt{\frac{E}{(1+\nu)}} \qquad (1.5.54)$$

となる．すなわち，上記(1.5.54)式と，前記(1.5.53)式とから，Mises の降伏条件では，二次元単純剪断における弾性際限と，単軸引張における弾性際限とは，その比が $1:\sqrt{3}$ であることがわかる．

二次元単純剪断の場合，もし総合最大歪エネルギー破損説を正しいものとすれば，(1.5.42)式において，$\sigma_1=\sigma_1$，$\sigma_2=-\sigma_1$，$\sigma_3=0$ として，

$$\{\sigma_1\ \ -\sigma_1\ \ 0\}\cdot\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ -\sigma_1\\ 0\end{Bmatrix}=K^2$$

$$\therefore\quad 2(\sigma_1)^2(1+\nu)=K^2$$

$$\text{i.e.,}\quad \sigma_1=\frac{K}{\sqrt{2(1+\nu)}} \qquad (1.5.55)$$

ここで，(1.5.51)式のように，$K=\sqrt{2E}\,k_{(2)}$ とすれば

$$\sigma_1=(\tau_{xy})=k_{(2)}\sqrt{\frac{E}{(1+\nu)}} \qquad (1.5.54)(\text{再出})$$

すなわち，Mises の説の場合に得た(1.5.54)式と同じ結果を得るが，この場合には，単軸引張における弾性際限との比は，(1.5.55)式が示す通り，$1:\sqrt{2(1+\nu)}$ となるべきであることがわかる．

次に最大歪エネルギー説に関連して，ここで，**塑性流動**について述べておくことにする．

単軸引張試験の場合には，総合的最大歪エネルギー破損説または，R. V. Mises の説のいずれにしても，$k_{(1)}=k_{(2)}$ とすれば，等方応力を原因とする破断限界よりも先に，偏差応力を原因とする降伏限界に到達することによって，弾性の際限を突破することは(ここまでは弾性の際限内である)，第 28 図から容易に理解されるが，このように歪がいったん弾性の際限に到達すると，その後は体積変化は停止し，変形のみが進行して，塑性流動が始まる．今，理想弾塑性体でない一般の弾塑性体を考えることとし，弾性の際限に到達した際の体積変化の(1/3)を e_0，この際の等方応力を s_0，とすれば，塑性流動が始まって後の歪 ε_i^j 及び，応力 σ_i^j は，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_i^j=e_0+e_i^j, \qquad \dot{\varepsilon}_i^j=\dot{e}_i^j\\&\sigma_j^i=s_0\delta_j^i+S_j^i=s_0\delta_j^i+s_j^i+(s')_j^i+(s'')_j^i+\cdots\\&(S_j^i=s_j^i+(s')_j^i+(s'')_j^i+\cdots)\end{aligned}\right\} \tag{1.5.56}$$

である《(1.5.40)式参照》.

任意の微小時間における塑性流動の進行(単位長さの変化または剪断角度変化)は，成分 $\dot{\varepsilon}_{ij}dt$ で表されるから，歪成分の増分 $\dot{\varepsilon}_{ij}dt$ の間に，応力によってなされる単位体積当りの仕事量 da は，

$$\begin{aligned}da=\dot{a}dt=\sigma^{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dt&=\{s_0\delta_k^i g^{kj}+S^{ij}\}\dot{e}_{ij}dt\\&=(s_0g^{ij}+S^{ij})\dot{e}_{ij}dt\\&=(s_0\dot{e}_i^i+S^{ij}\dot{e}_{ij})dt=S^{ij}\dot{e}_{ij}dt\\&\therefore\quad \dot{a}=S^{ij}\dot{e}_{ij}\end{aligned} \tag{1.5.57}$$

ただし，この場合，弾性状態における最初からの仕事量は必要でないから，上式では，弾性歪エネルギーのときのように，1/2 という係数は必要でなく省いてある.

今，時間 t を固定した場合の仮想変分を δ (仮想変分については，第2編参照のこと)なる記号で表すことにすれば，

$$\dot{a}+\delta\dot{a}=(S^{ij}+\delta S^{ij})(\dot{e}_{ij}+\delta\dot{e}_{ij})\doteqdot\dot{a}+\dot{e}_{ij}\delta S^{ij}+S^{ij}\delta\dot{e}_{ij}$$

$$\therefore\quad \delta\dot{a}=\dot{e}_{ij}\delta S^{ij}+S^{ij}\delta\dot{e}_{ij}\left(=\dot{e}_{ij}\delta S^{ij}+S^{ij}\frac{\partial\dot{e}_{ij}}{\partial S^{ij}}\delta S^{ij}\right) \tag{1.5.58}$$

ここで，塑性流動状態では，$\delta\dot{a}$ はもっぱら $S^{ij}\delta\dot{e}_{ij}$ に等しいものと仮定する．そうすると，

$$\dot{e}_{ij}\delta S^{ij}=0 \tag{1.5.59}$$

ただし，上記(1.5.59)式は，summation convention を意味するから，個々の成分 $\dot{e}_{ij}$ が 0 に等しいことを意味するものではない.

一方，塑性流動状態の或る時点 t における偏差歪エネルギーを $K_{(2)}$ で表すことにすれば，(1.5.48)式から，

$$S^{ij}S_{ij}=4GK_{(2)}{}^2$$

$$\therefore\quad S^{ij}S_{ij}-4GK_{(2)}{}^2=0$$

今，上式の左辺を $F(S^{ij})$ とおき，その仮想変分を考えると，

$$\delta F(S^{ij})=\frac{\partial F}{\partial S^{ij}}\delta S^{ij}=0 \tag{1.5.60}$$

(1.5.59)式及び上記(1.5.60)式は，共に，任意の仮想変分 δS^{ij} に対して成立しなければならないから，ξ を或る常数として，

$$\dot{e}_{ij}=\xi\frac{\partial F}{\partial S^{ij}} \tag{1.5.61}$$

が成立しなければならない．ただし，偏差応力テンソル S^{ij} は，対称テンソル

であるから，(1.5.59)式及び(1.5.60)式で，たとえば δS^{12} と δS^{21} とが，別々にこれらの式を満足しているものでなく，一かたまりとして満足していることを考えれば，δS^{ij} の選択は，

$$\dot{e}_{12}+\dot{e}_{21}=\xi\left(\frac{\partial F}{\partial S^{12}}+\frac{\partial F}{\partial S^{21}}\right)$$

のように，とらなければならないことがわかる．しかしながら上式の両辺の2項は互いに相等しいから，結局，任意の ij に対して，(1.5.61)式の成立することがわかる．

さて，$F(S^{ij})\equiv S^{ij}S_{ij}-4GK_{(2)}{}^2=0$ を S^{mn} で微分すると，

$$\frac{\partial F}{\partial S^{mn}}=\frac{\partial}{\partial S^{mn}}(S^{ij}S^{kl}g_{ik}g_{jl}-4GK_{(2)}{}^2)=S^{kl}g_{mk}g_{nl}+S^{ij}g_{im}g_{jn}$$
$$=S_{mn}+S_{mn}=2S_{mn}$$

ゆえに，上式と(1.5.61)式とから次式が得られる．

$$\dot{e}_{ij}=2\xi S_{ij}=\eta S_{ij} \tag{1.5.62}$$

ただし，η：或る常数，S_{ij}：塑性状態における全偏差応力，

$\dot{e}_{ij}$：塑性状態における全偏差歪の速度

上記(1.5.62)式は，粘弾性体における(1.5.40)式と似ているが，全偏差応力 S^{ij} が $\dot{e}_{ij}$ 唯一つだけに比例している点で，異なっている．上式(1.5.62)は，**Mises-Reuss の塑性流動法則**として知られている．

次に，偏差応力エネルギー式，(1.5.48)式

$$F\equiv S^{ij}S_{ij}-4GK_{(2)}{}^2=0,\quad \text{i.e.,}\quad F\equiv S^{ij}S^{kl}g_{ik}g_{jl}-4GK_{(2)}{}^2=0 \tag{1.5.63}$$

及び(1.5.61)式を，図解的に理解する方法を述べよう．

まず，六つの独立な偏差応力成分を新しい記号で，

$$\begin{bmatrix} S^{11} & S^{12} & S^{13} \\ S^{21} & S^{22} & S^{23} \\ S^{31} & S^{32} & S^{33} \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix} S^1 & S^6 & S^5 \\ & S^2 & S^4 \\ (\mathrm{SYM}) & & S^3 \end{bmatrix} \tag{1.5.64}$$

のように表し，六次元のデカルト座標系を想定する．このデカルト座標系応力空間内で，点の座標 $S^N(N=1,2,3,\cdots,6)$ が，物体中の一点の応力テンソルに対応するものとする．換言すれば，このデカルト座標系内の位置ベクトルが，応力ベクトル　$\boldsymbol{S}=S^N\boldsymbol{i}_N$ (summation convention)を表すものとする．ただし，デカルト座標系であるので $S^N=S_N$ と書いてもよいが，ここでは形式的に見やすいように S^N と書くこととし，$\boldsymbol{i}_N$ は，応力空間における基底ベクトルとしての役目を果たす単位ベクトルとする．

この六次元のデカルト空間で，(1.5.64)式は，5元(S^1, 〜, S^5)を自変数とする S^6 の曲面を画く．$F<0$ なるすべての点は，この曲面の内部に存在し，$\boldsymbol{K}_{(2)}=\boldsymbol{k}_{(2)}$

なる場合，曲面内部の点は，偏差応力の弾性状態を表示する．点 S^N がこの曲面(降伏曲面とよぶことにする)の表面上に来るまで偏差応力が増大すると，そこで塑性流動が開始される．塑性流動法則 (1.5.61)式において，$\dot{e}_{ij}=\dot{\varepsilon}_{ij}$ であるから，歪速度ベクトル $\dot{\gamma}_N$ を，

$$\dot{\gamma}_1=\dot{\varepsilon}_{11}=\dot{e}_{11}, \qquad \dot{\gamma}_2=\dot{\varepsilon}_{22}=\dot{e}_{22}, \qquad \dot{\gamma}_3=\dot{\varepsilon}_{33}=\dot{e}_{33}$$

$$\dot{\gamma}_4=\dot{\varepsilon}_{23}+\dot{\varepsilon}_{32}=\dot{e}_{23}+\dot{e}_{32}, \qquad \dot{\gamma}_5=\dot{\varepsilon}_{31}+\dot{\varepsilon}_{13}=\dot{e}_{31}+\dot{e}_{13}, \qquad \dot{\gamma}_6=\dot{\varepsilon}_{12}+\dot{\varepsilon}_{21}=\dot{e}_{12}+\dot{e}_{21}$$

のように定義すれば，(1.5.61)式は次のように書き表される．

$$\dot{\gamma}_N=\xi\frac{\partial F}{\partial S^N} \tag{1.5.65}$$

上式の左辺は，歪速度ベクトル $\dot{\boldsymbol{\gamma}}=\dot{\gamma}_N\boldsymbol{i}^N$ (ただし，デカルト座標系であるから $\boldsymbol{i}^N=\boldsymbol{i}_N$)の成分である．また，同じ(1.5.65)式の右辺は，曲面 $F=0$ に垂直なベクトル，

$$\mathrm{grad}\,F=\frac{\partial F}{\partial S^N}\cdot\boldsymbol{i}^N$$

の成分である．偏差応力 S^N に弾性の際限における等方応力 s_0 をも加えた全応力を σ^N と表し，s_0 は弾性の際限で停止するから $\delta\sigma^N$ には s_0 の変分は含まれないものとすれば，$\partial F/\partial S^N=\partial F/\partial\sigma^N$ と書いてもよい．

以上のようなベクトル用語を用いて，(1.5.65)式を表現すれば，“歪速度ベクトルは，曲面 $F=0$ に垂直である”ということができる．ただし，歪速度成分も，応力成分も，共に同じ六次元のデカルト座標系で表現するものとする．さらに歪増分 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}dt$ の間になされる塑性仕事は，

$$da=\sigma^N\cdot\dot{\gamma}_N dt=\boldsymbol{\sigma}\cdot\dot{\boldsymbol{\gamma}}dt$$

で表される．

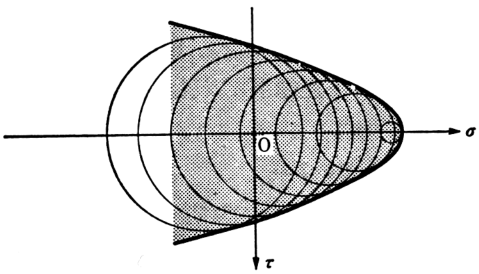
上記のような六次元の応力空間または歪空間による表示法は，三次元実空間でなく，きわめて観念的なもので，これを実際の図面にして見せるわけにはいかない．なお，前述の $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ によって表示された座標系は，物体内に定められた実際の座標系(デカルト座標系とはかぎらない)であることに注意する必要がある．応力空間を六次元空間で表示しないで，応力テンソルを三つの主応力で表し，これを座標軸とする三次元空間で表示する方法をとれば，実際に図面に画いて見せることが可能となる．その場合には，歪テンソルも三つの主歪で表さねばならないことはもちろんである．しかし，今の場合(1.5.61)式が，主応力による微分形式になっていないので，この方法をとるわけにはいかない．

以上で塑性流動についての説明を終ることにし，最後に歪エネルギー説の欠点を指摘して，それに対する修正意見を付け加えることにする．総合的最大歪エネルギー説にしても，また，dilatational energy 及び distortional energy をそれぞれ独立に設定する R. V. Mises の説にしても，これらの歪エネルギー

説は，等方応力が(＋)側にある場合と，(－)側にある場合とで，対称な破損限界を考えているが，実際には多くの材料において，挫屈のような別の原因を除外して，一様な三軸応力状態を想定すれば，等方応力が(－)，すなわち圧縮応力のときは，剪断応力による辷りは，等方応力が(＋)，すなわち引張応力のときよりも起りにくく，常に等方圧縮側で強度が大であるという事実がある．また，等方圧縮応力のみの場合には，ほとんど無限大に近い強度をもつであろうと考えられる．したがって，弾性破損限界は，等方応力の(－)側において無限大に近いところまで延長されるべきであるだけでなく，偏差応力による限界断面の円半径も，等方応力(符号を付したもの)が大きくなれば小さく，反対に(－)側に進むにつれて大きくなるべきであるから，第 28 図の破損面は次項に示すMohrの破壊説のように，方向係数$(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$なる等方応力軸を中心とする，回転放物面のような形をとるのが適当である．

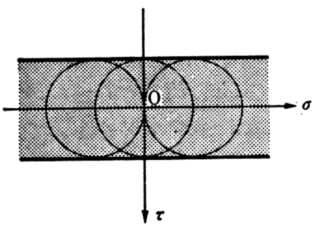
(iii)　Mohr の破壊説

Mohr は物体の弾性的破損は，或る界面に作用する垂直応力成分と，剪断応力成分との共同作用，すなわち合応力の作用によって生ずるものと想像した．或る界面に作用する垂直圧応力成分が大きければ，それだけこの界面に作用する抵抗静止摩擦応力，すなわち許容剪断応力も大きくなりうると考えられる．



第29図　Mohr の材料破壊領域

Mohr は種々な応力状態において実験を行い，弾性的破損を生じたときの，Mohr の主円(次章で後述する)を画き，この多くの主円を包む包絡線を作ってその物体の弾性的破損を説明しなければならないと力説している．

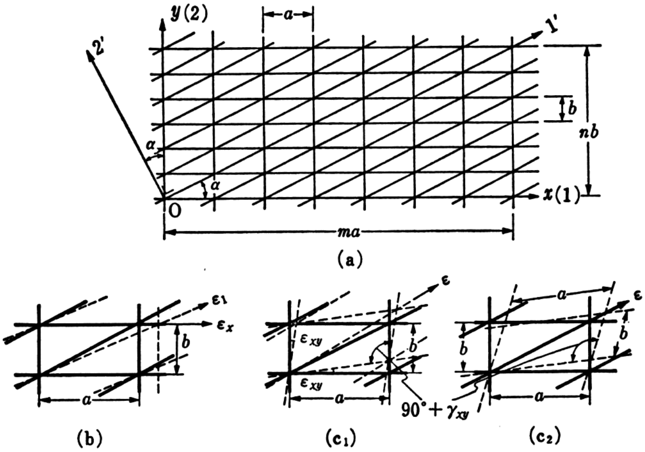


第30図　Mohr の材料破壊領域の特別な場合
(最大剪断応力破壊説の領域)

第 29 図に細い実線で示した多くの円を，種々の応力状態における実験から得た主円とし，太い曲線がそれらの主円の包絡線であるとすると，物体内の一点における応力テンソルは，最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 との平均値を中心とし，主剪断応力，$\tau=(\sigma_1-\sigma_3)/2$ を半径とする主円に対応して表示されることになる．

もし，第 30 図で示すように，単軸引張，単軸圧縮，及び二次元単純剪断試験で弾性的破損を生ずる場合の 3 個の主円の大きさが等しければ，この 3 円に引いた切線は，水平軸に平行な直線になるから，この直線が 3 個の主円の外の方でも無限に延びているものとすれば，この場合には，本学説は，最大剪断応力破壊説と一致することとなり，最大剪断応力破壊説は，この Mohr の破壊説の特別な場合として，これに包含されていることがわかる．

等方応力状態では，いずれの方向の界面をとっても，常に界面に垂直な，相等しい応力のみが存在し，剪断応力は常に 0 であるから，Mohr の応力円の半径は 0 となり，Mohr の応力円は，一点に収束する．しかし，だからといって，Mohr の破壊領域を示す包絡線の横座標軸（σ 軸）との交点，すなわち包絡線の先端部がとがっているとはかぎらないことを注意しておく．



第31図 異方性平面板の模型及びその変形

例題 第 31 図（a）に示すトラス結構が，四方にどこまでも広がっているものとする．このトラス結構は，摩擦のない hinge で結合された単純伸縮棒で構成されているものとし，これを homogeneous な異方性平面板の model として考えるものとする．このトラス結構に，逐次一様な歪，$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ 及び ε_{xy} を与え，これらの歪が棒の中に生ずる力を計算した後，内部の力を単位厚みの板内の応力として換算し，弾性率（見掛け）を計算せよ．ただし，水平部材及び垂直部材は共に，断面積が A で，斜材は $A/2$ の断面積を有するものとする．

解 まず，一様な x 方向の歪 ε_x を与えた場合を想定する．この場合，垂直部材は伸縮しないが，水平部材が，単純伸び歪 ε_x を受けるのと同時に，斜材が伸び歪 ε_1 を受ける（第 31 図（b））．すなわち，この場合，斜材の歪は，水平

部材の歪と次の関係にある.

$$a^2(1+\varepsilon_x)^2+b^2=(a^2+b^2)(1+\varepsilon_1)^2$$

$$a^2+b^2+2a^2\varepsilon_x \fallingdotseq (a^2+b^2)(1+2\varepsilon_1)$$

$$\therefore\quad \varepsilon_1=\frac{a^2}{a^2+b^2}\varepsilon_x$$

ゆえに平面板の辺長 ma 及び nb に作用する伸張力の総和は，高次項を省略すれば，

水平方向：$nAE\varepsilon_x+n\dfrac{A}{2}E\varepsilon_1(a/\sqrt{a^2+b^2})=nAE\{1+(a^3)/2(a^2+b^2)^{3/2}\}\varepsilon_x$

垂直方向：$m\dfrac{A}{2}E\varepsilon_1(b/\sqrt{a^2+b^2})=\dfrac{m}{2}AE(a^2b/(a^2+b^2)^{3/2})\varepsilon_x$

また，この場合，平面板の辺長に沿って作用する剪断力の総和は，高次項を省略して，

水平方向：　$m\dfrac{A}{2}E\varepsilon_1(a/\sqrt{a^2+b^2})=\dfrac{m}{2}AE(a^3/(a^2+b^2)^{3/2})\varepsilon_x$

垂直方向：　$n\dfrac{A}{2}E\varepsilon_1(b/\sqrt{a^2+b^2})=\dfrac{n}{2}AE(a^2b/(a^2+b^2)^{3/2})\varepsilon_x$

である．したがって，この場合の見掛け上の応力（ただし，板の厚みは単位厚みとする）は，次のようになる．

$$\sigma_x=\frac{AE}{b}\{1+(a^3)/2(a^2+b^2)^{3/2}\}\varepsilon_x$$

$$\sigma_y=\frac{AE}{2}\{ab/(a^2+b^2)^{3/2}\}\varepsilon_x$$

$$\tau_{xy}=\frac{AE}{2}\{a^2/(a^2+b^2)^{3/2}\}\varepsilon_x$$

$$\tau_{yx}=\frac{AE}{2}\{a^2/(a^2+b^2)^{3/2}\}\varepsilon_x=\tau_{xy}$$

次に，一様な y 方向の歪 ε_y を与えた場合を想定すると，この場合，これに伴う斜材の伸び歪 ε_1' は，上記の場合と同様にして，

$$\varepsilon_1'=\frac{b^2}{a^2+b^2}\varepsilon_y$$

したがって，この場合，見掛け上の応力は，前の場合と同様に高次項を省略して，次のようになる．

$$\sigma_x=\frac{AE}{2}\left\{\frac{ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}\varepsilon_y$$

$$\sigma_y=\frac{AE}{2}\left\{1+\frac{b^3}{2(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}\varepsilon_y$$

$$\tau_{xy}=\frac{AE}{2}\left\{\frac{b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}\varepsilon_y=\tau_{yx}$$

さらに，一様な剪断歪 $\varepsilon_{xy}(=(1/2)\gamma_{xy})$を与えた場合を想定すると，垂直部材，水平部材は，共に伸縮しないで，斜材のみが伸び歪 ε を受ける．したがって，この場合には次の関係式が成立する．

$$(a^2+b^2)(1+\varepsilon)^2=a^2+b^2-2ab\cos(90°+\gamma_{xy})$$

$$(a^2+b^2)2\varepsilon\fallingdotseq 2ab\sin(\gamma_{xy})$$

$$\therefore\quad \varepsilon=\frac{ab}{a^2+b^2}\sin(\gamma_{xy})\fallingdotseq\frac{ab}{a^2+b^2}\cdot\gamma_{xy}$$

この場合に高次項を省略して考えれば，変形前後の状態は，第 31 図(c_1)のように考えることもできるが，これはまた第 31 図(c_2)のように，変形前後における斜材の方向を重ね合せて考えてもよい．そうすると，斜材の引張力に基づいて生ずる見掛け上の応力は，次のようになる．

$$\sigma_x=\frac{AE}{2}\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\gamma_{xy}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{b}=\frac{AE}{2}\left\{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}(\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx})$$

$$\sigma_y=\frac{AE}{2}\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\gamma_{xy}\right)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{AE}{2}\left\{\frac{b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}(\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx})$$

$$\tau_{xy}=\frac{AE}{2}\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\gamma_{xy}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{AE}{2}\left\{\frac{ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}(\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx})$$

$$\tau_{yx}=\frac{AE}{2}\left\{\frac{ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}(\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx})=\tau_{yx}$$

以上の計算結果から，見掛け上の弾性率は，次のようになる．

$$E^{1111}=\frac{AE}{b}\left\{1+\frac{a^3}{2(a^2+b^2)^{3/2}}\right\},\qquad E^{1122}=E^{2211}=\frac{AE}{2}\left\{\frac{ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}$$

$$E^{1211}=E^{2111}=E^{1121}=E^{1112}=\frac{AE}{2}\left\{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}$$

$$E^{2222}=\frac{AE}{a}\left\{1+\frac{b^3}{2(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}$$

$$E^{1222}=E^{2122}=E^{2221}=E^{2212}=\frac{AE}{2}\left\{\frac{b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}$$

$$E^{1212}=E^{1221}=E^{2112}=E^{2121}=\frac{AE}{2}\left\{\frac{ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}$$

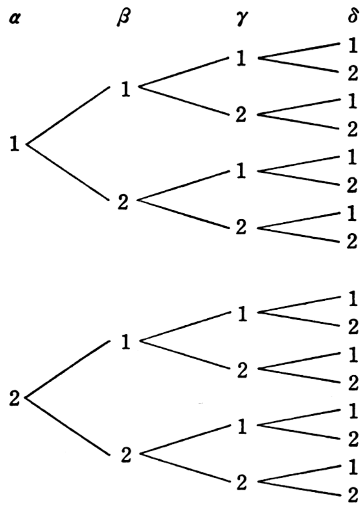
また，

$$\beta_1^{1'}=\beta_2^{2'}=\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\beta_2^{1'}=-\beta_1^{2'}=\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$E^{1'1'1'1'}=E^{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot\beta_\alpha^{1'}\beta_\beta^{1'}\beta_\gamma^{1'}\beta_\delta^{1'}$$

ところが，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ の“繰返しを許す組合せ”は，次の通りである．



したがって，

$$E^{1'1'1'1'}=\frac{AE}{b}\left\{1+\frac{a^3}{2(a^2+b^2)^{3/2}}\left(\frac{a^4}{(a^2+b^2)^2}\right)\right.$$

$$+2AE\left\{\frac{a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}\left(\frac{a^3b}{(a^2+b^2)^2}\right)$$

$$+3AE\left\{\frac{ab}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}\left(\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right)$$

$$+2AE\left\{\frac{b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}\left(\frac{b^3a}{(a^2+b^2)^2}\right)$$

$$+\frac{AE}{a}\left\{1+\frac{b^3}{2(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}\left(\frac{b^4}{(a^2+b^2)^2}\right)$$

$$=\frac{AE}{ab(a^2+b^2)}\left\{(a^5+b^5)+\frac{1}{2}(a^2+b^2)^{5/2}\right\}$$

$$E^{1'2'1'2'}=E^{\alpha\beta\gamma\delta}\beta^{1'}_{\alpha}\beta^{2'}_{\beta}\beta^{1'}_{\gamma}\beta^{2'}_{\delta}$$

$$=\frac{AE}{b}\left\{1+\frac{a^3}{2(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}\cdot\left\{\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right\}-\frac{AEa^3b(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^{7/2}}$$

$$+\frac{AE\cdot ab(a^4-4a^2b^2+b^4)}{(a^2+b^2)^{7/2}}+\frac{AEab^3(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^{7/2}}$$

$$+\frac{AE}{a}\left\{1+\frac{b^3}{2(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}\cdot\left\{\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right\}$$

$$=\left\{\frac{AEab}{(a^2+b^2)^2}\right\}\cdot\left\{(a+b)+\frac{a^4-4a^2b^2+b^4}{2(a^2+b^2)^{3/2}}\right\}$$

etc.

N.B.：通常 σ^{12} なる記号で表示される応力は，

$$\sigma^{12}=E^{12ij}\varepsilon_{ij}=E^{1211}\varepsilon_{11}+E^{1212}\varepsilon_{12}+E^{1213}\varepsilon_{13}$$
$$+E^{1221}\varepsilon_{21}+E^{1222}\varepsilon_{22}+E^{1223}\varepsilon_{23}$$
$$+E^{1231}\varepsilon_{31}+E^{1232}\varepsilon_{32}+E^{1233}\varepsilon_{33}$$

であるから，このうちたとえば，$E^{1212}(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})$は，単に$\sigma^{12}$なる応力の一部分にすぎない．したがって $E^{1212}(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})$ や，まして $E^{1212}\varepsilon_{12}$ は，応力σ^{12}とは区別するべき性質のものであるが，上記の解析では，歪成分 $(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})=\gamma_{12}$ のみによる応力に対しても，$\sigma^{12}=\tau_{xy}$ なる記号を用いた《ただし，等方体においては，$E^{1211}=E^{1213}=E^{1222}=E^{1223}=E^{1231}=E^{1232}=E^{1233}=0$であるから，現実に$\sigma^{12}=E^{1212}(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})$ である》．また，ε_x による剪断応力と，ε_y による剪断応力とは，全然別々のものであるが，上記では，同じ記号 τ_{xy} を用いた．

（例題解答終り）

第1.6章　二次元及び三次元対称テンソル（二階）の図形表示

1.6.1　二次元対称テンソルの Mohr 円表示

デカルト座標系で表された二次元対称テンソルが，一般にMohr円として表示しうることについては，すでに周知のこととして，改めて説明することをやめ，ここでは，Mohr 円表示について，特に注意しなければならない若干の項目について述べることとする．

まず，Mohr 円の座標軸の正方向のとり方と，角度の正方向の実物との対応関係について，平面応力テンソルを例として説明する．

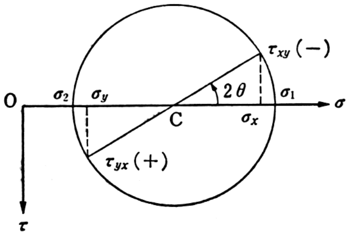
第32図に示すように，Mohr 円では，x 軸方向に σ 軸をとり，y 軸方向に τ 軸をとるが，この y 軸の正方向を，下向きにとるようにする．すなわち，Mohr 円での座標系は，特に左手座標系に選ぶように規約する．その理由は，第32図に示すように，Mohr円での主応力 σ_1 方向から，反時計回りに 2θ だけ回った点の σ_x, τ_{xy} を，物体内部での主応力 σ_1 方向から，同じく反時計回りに θ だけ回った方向の実界面に作用する応力に，対応させるためである．

テンソルの Mohr 円表示では，一対の剪断応力 τ_{xy} と τ_{yx} は，常に反対の符号として表示されるが，σ_x と τ_{xy} または σ_y と τ_{yx} の，物体内の実界面での正方向のとり方を，第 33 図に示すように，常に右手座標系を形成するようにとり，かつ，物体内部での主応力 σ_1 の方向から，(σ_x, τ_{xy}) の作用する実界面ベクトルの方向，または，(σ_y, τ_{yx}) の作用する実界面ベクトルの方向に至る回転角 θ の方向を，Mohr 円での回転角 2θ の方向と一致させようとすれば，どうしても，Mohr 円での σ, τ 両座標軸の正方向のとり方は，左手座標系とならざるをえないのである．

このような，正方向の規約を明確にしておくことは，光弾性実験などで，実際に剪断応力差法(shear difference method)によって，或る断面上の各点に作用する応力成分を求めその向きを決定する場合に，いちいち迷わないようにするためにきわめて重要である．

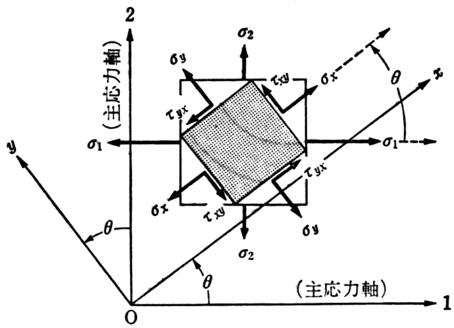
上述のように，Mohr 円での座標軸の正方向を，左手座標系に選ぶことに規約すれば，第32図に示すように，τ_{xy} は負に，一方，τ_{yx} は正として表され，これに対応する物体内の実界面での(σ, τ)の正方向は，第33図に示すように，常に右手座標系を形成するような向きになる．これに反して，テンソル表示での各成分の実界面での正方向は，第34図に示すようになっている．このように

Mohr 円での各成分の正方向に対応する，物体内の実界面での正方向と，テンソル表示での各成分の実界面での正方向とは，完全に一致していないのである．このことについては，特に注意をしておく必要がある．

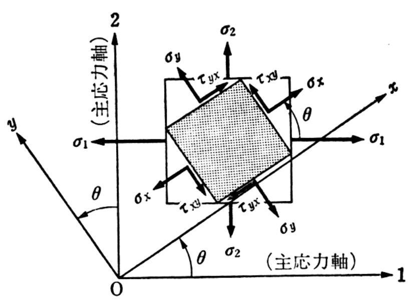


第32図　物体内の主応力 σ_1 の方向から，角度 θ なる方向のベクトル界面に作用する応力成分の Mohr 円表示

次に，応力テンソルも歪テンソルも，同じく二階のテンソルであるから，いずれも Mohr 円として表示されうるが，実際上，電気抵抗線歪計の Rosette ゲージで，平面物体内の或る点で平面内の 3 方向における縦歪成分を計測して，この結果から Mohr の歪円を画いた後，これに対応する Mohr の応力円を求めたいという要求が，しばしば生ずる．そこで，平面応力と，これに対応する二次元歪とを，同時に同一図面上に，Mohr 円として図示する方法について述べることにする．



第33図　微小立方体素片に作用する平面応力成分の Mohr 円表示に対する正方向の規約



第34図　微小立方体素片に作用する平面応力テンソル成分の正方向

平面主応力と，二次元主歪との関係は，

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \varepsilon_2 & \\ 0 & & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_2 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}
$$

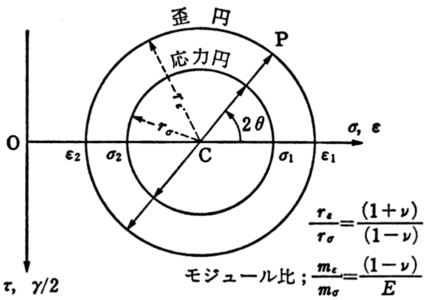
$$
-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+0) \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}
$$

したがって，

$$
\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2
$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_2&=\frac{1}{E}\sigma_2-\frac{\nu}{E}\sigma_1\\ \varepsilon_3&=-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad\left.\begin{aligned}\varepsilon_1+\varepsilon_2&=\frac{(1-\nu)}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\\ \varepsilon_1-\varepsilon_2&=\frac{(1+\nu)}{E}(\sigma_1-\sigma_2)\end{aligned}\right\}\qquad(1.6.1)$$



第35図　Mohr の応力円と歪円(第1法)

そこで上式(1.6.1)の第1式から第35図のように，まずMohrの応力円を通常の画き方で画き，座標原点と，Mohr の応力円の中心との間の距離を，その単位長を$(1-\nu)/E$ の長さ(数値)に読み換えて歪を読み取ることにすれば，Mohr の応力円と，Mohr の歪円との中心位置を一致させて画くことができることがわかる．Mohr の歪円の半径は，(1.6.1)式の第2式から，応力円の半径数値の$(1+\nu)/E$ 倍の数値であるが，Mohr の歪円では，第35図で，単位長が，上記のようにすでに$(1-\nu)/E$ に読み換えられているから，

$$\frac{(1+\nu)}{E}\bigg/\left(\frac{1-\nu}{E}\right)=\frac{1+\nu}{1-\nu}$$

なる長さを半径長として画かなければならない．上記の事柄を言い換えれば，“応力軸のモジュール m_σ と，歪軸のモジュール m_ε との比を

$$m_\varepsilon=\frac{(1-\nu)}{E}m_\sigma\qquad(1.6.2)$$

に選び，応力円と歪円との半径の実長比を

$$r_\varepsilon=\frac{1+\nu}{1-\nu}r_\sigma\qquad(1.6.3)$$

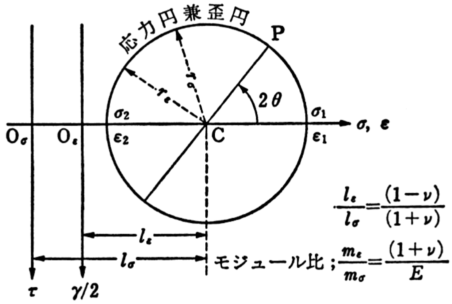
にとれば，Mohr の応力円と Mohr の歪円とを，同時に，同じ図面上に，中心を同じにして画くことができる”(第35図)ということになる．

さらに，今度は，第36図に示すように，まずMohrの応力円を通常の画き方で画き，その半径長を，単位長について，$(1+\nu)/E$ の数値の歪に読み換えれば，(1.6.1)式の第2式から，同一の Mohr 円で，応力円と歪円とを兼ねさせることができることがわかるが，この場合，Mohr の歪円中心と座標原点との距離の数値は，(1.6.1)式の第1式から応力円の場合の数値の$(1-\nu)/E$ 倍の数

値であるが，Mohr の歪円では，第 36 図で，単位長をすでに $(1+\nu)/E$ に読み換えているから，Mohr の歪円中心と，座標原点との間の距離は，

$$\frac{(1-\nu)}{E}\Big/\frac{(1+\nu)}{E}=\frac{1-\nu}{1+\nu}$$

にとらなければならない．このことを換言すれば，"応力軸のモジュール m_σ と，歪軸のモジュール m_ϵ との比を



第 36 図　Mohr の応力円と歪円（第 2 法）

$$m_\epsilon=\frac{(1+\nu)}{E}m_\sigma \tag{1.6.4}$$

に選び Mohr 円中心と応力軸座標原点間の距離と，同じ Mohr 円中心と，歪軸座標原点間の距離の実長比を

$$l_\epsilon=\frac{1-\nu}{1+\nu}l_\sigma \tag{1.6.5}$$

にとれば，Mohr の応力円と，Mohr の歪円とを，一つの円で兼ねさせて，同一図面上に，図示することができる"（第 36 図）ということになる．

第 35 図では，(1.6.3)式が示す通り，常に歪円の半径のほうが，応力円の半径よりも大きく表され，また第 36 図では，(1.6.5)式が示す通り Mohr 円中心と座標原点間の距離は，常に歪軸に対するもののほうが，応力軸に対するものよりも小さく表される．

いずれにしても，歪テンソルの剪断成分は，γ ではなく，$\gamma/2$ であるから，Mohr の歪円座標系における縦軸には，γ でなく，$\gamma/2$ をとらなければならないことに注意する必要がある．

1.6.2 三次元対称テンソルの Mohr 円表示

デカルト座標系で表された三次元対称テンソルを Mohr 円として図示する方法について，応力テンソルを例にとって，以下に述べることにする．

三つの主応力方向を座標軸にとったデカルト座標系 (ξ, η, ζ) において，任意の方向 (l, m, n) に垂直な面に作用する合応力 $\boldsymbol{F}$ 及びその垂直成分 σ は，

$$\boldsymbol{F}=\begin{Bmatrix}F_\xi\\F_\eta\\F_\zeta\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_3\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}l\\m\\n\end{Bmatrix}$$

$$\sigma=\{l\ \ m\ \ n\}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_3\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}l\\ m\\ n\end{Bmatrix}$$

したがって，

$$\left.\begin{aligned}&(|\boldsymbol{F}|)^2=(F_\xi)^2+(F_\eta)^2+(F_\zeta)^2=(\sigma_1 l)^2+(\sigma_2 m)^2+(\sigma_3 n)^2\\&\sigma=\sigma_1 l^2+\sigma_2 m^2+\sigma_3 n^2\\&l^2+m^2+n^2=1\end{aligned}\right\}\quad(1.6.6)$$

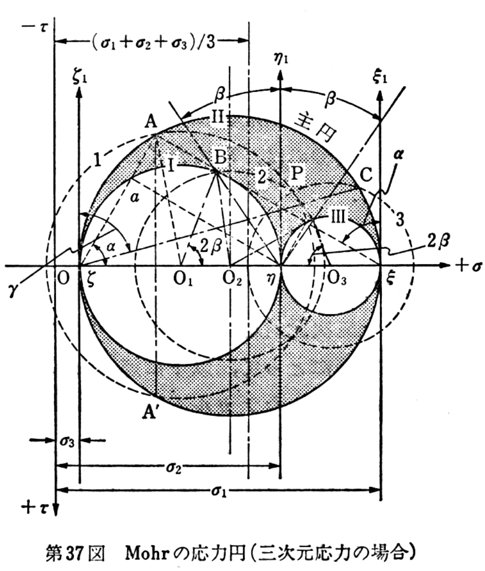
である．また，

上記(1.6.6)式の三つの式を，未知数 l^2, m^2, n^2 に関する連立一次方程式と見立て，かつ，$(|\boldsymbol{F}|)^2=(\sigma^2+\tau^2)$ とおいて，これを解けば，次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}l^2&=\frac{\tau^2+(\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)}\\m^2&=\frac{\tau^2+(\sigma-\sigma_3)(\sigma-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}\\n^2&=\frac{\tau^2+(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)}{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)}\end{aligned}\right\}\quad(1.6.7)$$

上記の(1.6.7)式をさらに書換えれば

$$\left.\begin{aligned}\tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2&=(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)l^2+\frac{1}{4}(\sigma_2-\sigma_3)^2\\\tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2&=(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)m^2+\frac{1}{4}(\sigma_3-\sigma_1)^2\\\tau^2+\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2&=(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)n^2+\frac{1}{4}(\sigma_1-\sigma_2)^2\end{aligned}\right\}\quad(1.6.8)$$



第37図　Mohrの応力円(三次元応力の場合)

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$；$l, m, n$を与えられた定数とし，$\sigma$及び$\tau$を変数と見，$\sigma$を横座標にとり，$\tau$をこれと直角に交わる縦座標にとって，上記(1.6.8)式を図示すれば，横座標軸上において，原点Oから，それぞれ，

$$\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2},\quad \frac{\sigma_3+\sigma_1}{2},\quad \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$$

の距離にある点に中心を有し(これを O_1, O_2, O_3 とする)，

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)l^2+\dfrac{1}{4}(\sigma_2-\sigma_3)^2}\\ \sqrt{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)m^2+\dfrac{1}{4}(\sigma_3-\sigma_1)^2}\\ \sqrt{(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)n^2+\dfrac{1}{4}(\sigma_1-\sigma_2)^2}\end{array}\right\} \tag{1.6.9}$$

を半径とする3個の円となる．第37図に点線で示した円1, 2, 3 がこれである．今，$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ と仮定すれば，

$$\left.\begin{array}{l}(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)>0\\ (\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)<0\\ (\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)>0\end{array}\right\} \tag{1.6.10}$$

なる不等式が成立し，したがって，$l=\cos\alpha, m=\cos\beta, n=\cos\gamma$ とするとき，第1円は，$\alpha=\pi/2$ のとき最小となり，その半径は$(1/2)(\sigma_2-\sigma_3)$となる．また，第2円は，$\beta=\pi/2$ のとき最大となり，その半径は$(1/2)|(\sigma_3-\sigma_1)|$となる．さらに，第3円は，$\gamma=\pi/2$ のとき最小となり，その半径は $(1/2)(\sigma_1-\sigma_2)$ となる．これらの場合には，第37図に示すように，応力円1, 2, 3の代りに，I, II, IIIが得られ，σ, τ を座標とする点の位置は，これらの三つの円を限界線とする部分，すなわち，同図に陰影をほどこした部分の範囲に限られることとなる．最大円IIを，主円とよぶ．

(1.6.8)式の3式のいずれにおいても，lまたはmまたはnが定まれば，円は定まるから，(1.6.7)式の第2式において，$m=\cos\beta=\cos\pi/2$ すなわち $m=0$ とおけば，

$$\tau^2=(\sigma_1-\sigma)(\sigma-\sigma_3)$$

となり，主円IIの方程式が得られる《これは，(1.6.8)式の第2式において，$m=0$とおいた式と同じものである》．これを，(1.6.7)式の第1式に代入すれば，円1とIIとの交点A及び A′（第37図)の位置を示す関係式として，

$$\cos^2\alpha=\frac{\sigma-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3} \tag{a}$$

なる式を得る．この式のσは，A及びA′点の横座標である．ところが，

$$\cos\angle A\xi\xi_1=\frac{\sigma-\sigma_3}{\overline{\zeta A}}=\frac{\overline{\zeta A}}{\sigma_1-\sigma_3}$$

$$\therefore\quad \cos^2\angle A\xi\xi_1=\frac{\sigma-\sigma_3}{\overline{\zeta A}}\cdot\frac{\overline{\zeta A}}{\sigma_1-\sigma_3}=\frac{\sigma-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3} \qquad (\mathrm{b})$$

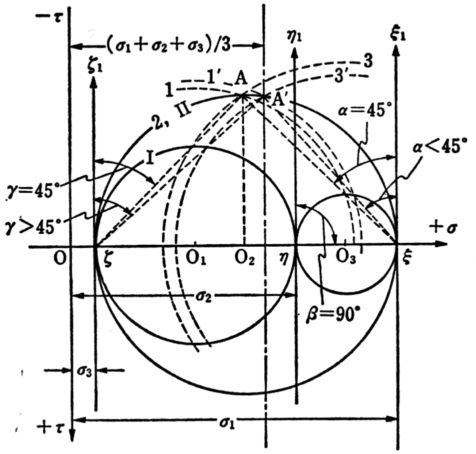
ゆえに，上記の(a)式と(b)式とから $\cos\angle A\xi\xi_1=\cos\alpha$, $\angle A\xi\xi_1=\alpha$. 同様にして，$\angle C\zeta\zeta_1=\gamma$, $\angle B\eta\eta_1=\beta$ である.

したがって，α, β, γ が与えられるとA, B, C点を通り，O_1, O_2, O_3 を中心とする円 1, 2, 3 を画きその交点Pの座標を測定することによって ($l^2+m^2+n^2=1$ ならば，円 1, 2, 3 は必ず一点，たとえばP点で互いに交叉しなければならない) ξ, η, ζ 軸と α, β, γ の傾斜をなす法線を有する平面に，作用する合応力 (σ, τ) の大きさを求めることができる. また，逆に (σ, τ) の合応力が作用する平面の法線方向を示す角，(α, β, γ) の値は，σ, τ を座標とするP点を通過する三つの円 1, 2, 3 を画いて見いだしうるわけである.

第37図からわかるように，$\sigma=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3$ なる横座標上における τ の値(縦座標値)は，或る界面の垂直応力が等方応力に等しいような界面に作用する剪断応力の値であるから，応力テンソルを等方応力テンソルと偏差応力テンソルに分解した場合の，偏差応力テンソルで垂直応力が0であるような場合の剪断応力値，すなわち偏差純剪断応力値を示していることになる. したがって，この偏差純剪断応力となる場合の τ の最大値は，

$$(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3\fallingdotseq(\sigma_1+\sigma_3)/2, \quad \text{i.e.,} \quad \sigma_2\fallingdotseq\frac{(\sigma_1+\sigma_3)}{2}$$

なる限り，絶対最大剪断応力値でもなければ，また，剪断応力の停留値でもない. 絶対最大剪断応力及び剪断応力の停留値は，それぞれ $\sigma=(\sigma_1+\sigma_3)/2$, $\sigma=(\sigma_1+\sigma_2)/2$, 及び $\sigma=(\sigma_2+\sigma_3)/2$ のときに生じ，それぞれ，$\tau=(\sigma_1-\sigma_3)/2$, $\tau=(\sigma_1-\sigma_2)/2$, 及び $\tau=(\sigma_2-\sigma_3)/2$ である. これを**主剪断応力**とよんでいる.

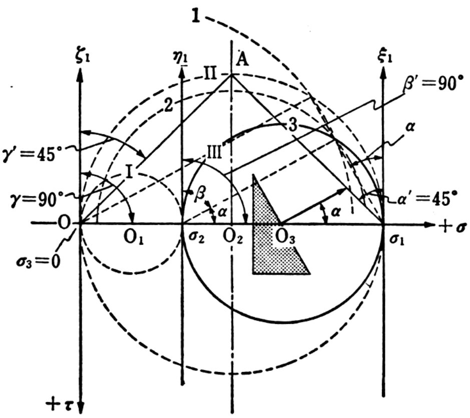


第38図　絶対最大剪断応力値と偏差純剪断応力の最大値

したがって一般に偏差純剪断応力の最大値は，絶対最大剪断応力ではない. 第38図は絶対最大剪断応力値(A)と偏差純剪断応力の最大値(A′)との関係を図示したもので，いずれもIIの円周上にあるから，主応力 σ_1 と σ_3 の2方向が決定する平面上にある剪断応力であるが，絶対最大剪断応力は，σ_1 方向及び σ_3 方向

を二等分する方向(σ_1 方向から σ_3 方向へ，反時計回りに 45° の方向)を法線とする界面に作用するのに対して，偏差純剪断応力の最大値は，第 38 図のような場合では，σ_1 方向から σ_3 方向へ，反時計回りに，45° よりも小さな角度の方向を法線とする界面に作用していることを示している．

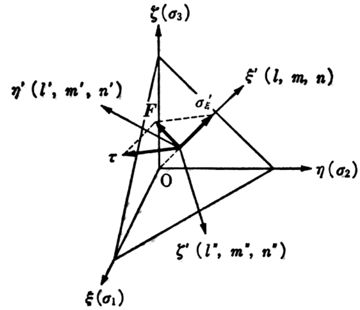
また，$\sigma_1>\sigma_2>0$ でかつ $\sigma_3=0$ なる場合，すなわち平面応力の場合には，前節で述べたように，通常われわれは，σ_1 方向及び σ_2 方向が決定する平面内にある応力のみを考えて問題を処理しているのが常である．このことは，第 39 図に示すように，Mohr のⅢ円だけを考えて，問題を処理しているのと同じことであるが，これを，三次元的に考えれば，第39図に点線で示したMohr円(Ⅰ及びⅡの円)を追加して考えなければならないから，この場合の最大剪断応力は，実は σ_1 方向と σ_2 方向とが決定する平面内で σ_1 方向に対して 45° の方向を法線とする界面に作用する剪断応力ではなく，σ_1 方向と，$\sigma_3(=0)$ 方向とが決定する平面 (平面応力の平面に垂直な平面)内にあって，σ_1 方向と 45° の傾きをなす方向を法線とする界面に作用する剪断応力(第 39 図A点)であることがわかる．



第39図　Mohr の応力円で $\sigma_1>\sigma_2>0$，$\sigma_3=0$ なる場合

次に，三次元の Mohr 応力円について，注意すべき事柄が二つある．その一つは，三次元の Mohr 応力円の場合に求められる剪断応力 τ の値は，第 37 図のⅠ，Ⅱ，Ⅲ円の円周上にある点の場合を除いて，すべて，主応力座標軸面上にない方向の剪断応力，すなわち合剪断応力の値であることである．

第 2 に注意すべき事柄は，第 37 図で陰影をほどこした領域の内部(Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ円の円周上の点を除く) にある点，たとえば P 点で示される，垂直応力 σ 及び剪断応力 τ の方向と，その作用界面の方向の符号に関する判定を，どのようにすればよいかという問題である．第 37 図で点 P が，円Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ のいずれかの円周上にある場合は，主応力軸面内にある応力を示しているので，その符号については，前節に示した規約通りにすればよいが，一般的に，三つの主応力座標軸の中間の方向余弦 (l, m, n) をもつ方向を，法線とする界面に作用する垂直応力 σ 及び合剪断応力 τ の向きを判定することは，前節の方法では困難である．



第40図 合剪断応力τと垂直応力σ_{ξ}'の向きの判定

一般に，法線(l, m, n)を有する界面に作用する垂直応力 $\sigma_{\xi'}$ 及び剪断応力 $\tau_{\xi'\eta'}, \tau_{\xi'\zeta'}$ は(第40図参照)，

$$\boldsymbol{F}=\begin{Bmatrix}\sigma_{\xi'}\\ \tau_{\xi'\eta'}\\ \tau_{\xi'\zeta'}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}l & m & n\\ l' & m' & n'\\ l'' & m'' & n''\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_3\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}l\\ m\\ n\end{Bmatrix} \tag{1.6.11}$$

ただし，

$$\left.\begin{array}{ll}(l, m, n) & :\xi' \text{ 軸の，} (\xi, \eta, \zeta) \text{ 座標軸に関する方向余弦}\\ (l', m', n') & :\eta' \text{ 軸の，} (\xi, \eta, \zeta) \text{ 座標軸に関する方向余弦}\\ (l'', m'', n'') & :\zeta' \text{ 軸の，} (\xi, \eta, \zeta) \text{ 座標軸に関する方向余弦}\\ & ll'+mm'+nn'=0\\ & l'l''+m'm''+n'n''=0\\ & l''l+m''m+n''n=0\end{array}\right\}$$

で表されるから，上記(1.6.11)式で表されたベクトル成分値の，正負を見て，ξ'軸,η'軸,ζ'軸，それぞれの向きと同じ向きであるか，または反対方向の向きであるかを判定すればよい．

1.6.3 主応力で表された応力テンソル不変量及び八面体合剪断応力

応力テンソルの一次，二次，三次不変量をそれぞれ I_1, I_2, I_3 と記することとし，これらを主応力値で表せば，次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}I_1&=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=3s\\ I_2&=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\\ I_3&=\sigma_1\sigma_2\sigma_3\end{aligned}\right\} \tag{1.6.12}$$

したがって，偏差応力テンソルの一次，二次，三次不変量をそれぞれ J_1, J_2, J_3 と記すこととすれば，次の関係式が成立する．

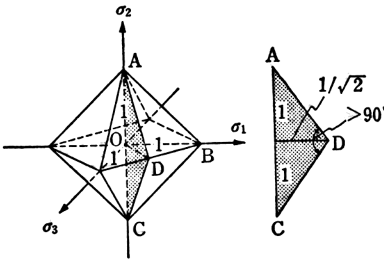
$$J_1=s_1+s_2+s_3=0$$

$$\begin{aligned}J_2&=s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1\\ &=(s+s_1)(s+s_2)+(s+s_2)(s+s_3)+(s+s_3)(s+s_1)-3s^2\\ &=I_2-3s^2=I_2-\frac{1}{3}(I_1)^2\end{aligned} \tag{1.6.13}$$

$$J_3=s_1s_2s_3=I_3-I_2s+2s^3=I_3-J_2s-s^3 \tag{1.6.14}$$

(ただし，s：等方応力$(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$，$s_1, s_2, s_3$：偏差主応力)

八面体合剪断応力というのは，三つの主応力方向に対して，$l=m=n=1/\sqrt{3}$ なる方向余弦の方向を，法線とする界面上の合剪断応力のことである．このような面を八面体面(octahedral plane)とよび，この面を8個組合せて，正八面体を作ることができる（第 41 図参照）．



第41図　八面体面

この八面体面における合剪断応力を τ_0 と記することにすれば，一般に方向余弦(l, m, n)の法線を有する界面では，合剪断応力 τ と垂直応力 σ とは，

$$\begin{aligned}\tau^2 &= (\sigma_1 l)^2+(\sigma_2 m)^2+(\sigma_3 n)^2-\sigma^2\\ &=(\sigma_1 l)^2+(\sigma_2 m)^2+(\sigma_3 n)^2-(\sigma_1 l^2+\sigma_2 m^2+\sigma_3 n^2)^2\\ &=l^2m^2(\sigma_1-\sigma_2)^2+m^2n^2(\sigma_2-\sigma_3)^2+n^2l^2(\sigma_3-\sigma_1)^2\\ &\langle\!\langle \because\ \ l^2-l^4=l^2(1-l^2)=l^2(m^2+n^2)\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

なる関係にあるから，τ_0 は，

$$(\tau_0)^2=\frac{1}{9}\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\}$$

となり，これは Mohr の三つの半円の面積の和に比例する．またこの八面体合剪断応力は，

$$9(\tau_0)^2=2(I_1)^2-6I_2=-6J_2 \tag{1.6.15}$$

のようにも表される．すなわち八面体合剪断応力の 2 乗は，偏差応力テンソルの二次不変量 J_2 に比例する．1913 年，Richard von Mises は主要な或る材料のなかには，J_2の或る一定値において，降伏するものがあるという仮説を提案した．その後 Nadai は，J_2 の意味を，八面体合剪断応力の 2 乗に比例する量として導入し，J_2 を，塑性理論の基礎方程式に組入れた．

1.6.4　三次元における応力-歪間の関係とその Mohr 円表示，並びに，二次的応力-歪間の関係とその Mohr 円表示

三次元における応力は，(1.6.8)式によって表され，第 37 図のように，Mohr 円で図示されることは，本章，第 2 節で述べた通りである．したがって，これと同様に三次元における歪もまた，第37図のような，Mohr円で表されることは明らかである．そこで，これらの Mohr の応力円と歪円とを，同時に同一図面上に図示した場合に，その相互関係はどのようになるかについて考えてみよう．

平面応力の場合については，Mohr の応力円と歪円の同時図示法として，第1法と第2法の二つの方法があることを，すでに本章第1節で述べた．三次元等方体の場合には，主応力$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$と主歪$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$は，その方向が一致し，Hooke の法則によって，

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_1-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\\ \varepsilon_2&=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_2-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\\ \varepsilon_3&=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_3-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\end{aligned}\right\}$$

なる関係を有するから，Mohr 円の中心については，

$$\frac{\varepsilon_i+\varepsilon_j}{2}=\frac{(1+\nu)}{E}\cdot\frac{(\sigma_i+\sigma_j)}{2}-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \qquad (1.6.16)$$

なる関係があり，また，Mohr 円の半径については，

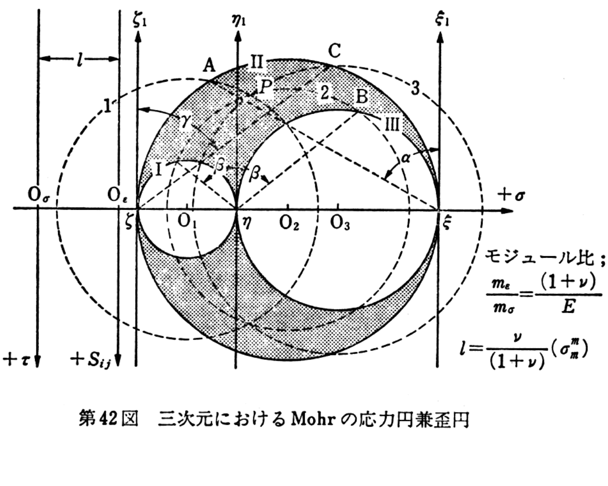
$$\frac{(\varepsilon_i-\varepsilon_j)}{2}=\frac{(1+\nu)}{E}\cdot\frac{(\sigma_i-\sigma_j)}{2} \qquad (1.6.17)$$

なる関係がある．したがって，三次元の場合，応力円，歪円の両座標系の原点と円中心間距離をそろえる第1法には適切なモジュールを見出しえないけれども，応力円，歪円の半径をそろえる第2法に対しては，$m_\varepsilon : m_\sigma=(1+\nu)/E$（ただし，$m_\varepsilon, m_\sigma$：それぞれ歪及び応力のモジュール）にとればよいことがわかる．

この場合，Mohr の歪円中心と，歪座標原点間の距離は，

$$\left(\frac{\varepsilon_i+\varepsilon_j}{2}\right)\Big/\left(\frac{1+\nu}{E}\right)=\frac{(\sigma_i+\sigma_j)}{2}-\frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \qquad (1.6.18)$$

すなわち，歪座標原点 O_ε は，常に応力座標原点 O_σ の右側に



第42図　三次元における Mohr の応力円兼歪円

$$\frac{\nu}{(1+\nu)}(\sigma_m^m)=\frac{3\nu}{(1+\nu)}s \qquad 《\because \quad (1.5.30)\text{式による}》 \qquad (1.6.19)$$

$$=\frac{3\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}Ee$$

$$《\because \quad (1.5.32)\text{式による}》 \qquad (1.6.20)$$

なる距離にとればよい(第42図参照).

第42図で，I，II，IIIなる三つの円の周上の点は，それぞれ三つの主応力面(主歪面) 上にある点の位置ベクトルを法線とする界面における応力と歪に対応しているが，同じく第 42 図で陰影をほどこした領域内部の点Pで交わる三つの円 1,2,3 の円周上の点は，それぞれ，角度 α, β, γ が一定な直線上の点の位置ベクトルを法線とする界面における応力と歪に対応している．すなわち，たとえば，円1の円周上の点は，$l=\cos\alpha$ を固定し，$m=\cos\beta, n=\cos\gamma$ を色々変化させた場合，方向余弦(l, m, n) の方向を法線とする色々な界面における応力と歪を表している．換言すれば，円1は，$l=\cos\alpha$ を固定した場合の二次的応力及び歪に対応する Mohr 円である．

本章第1節で述べた平面応力の場合の，応力・歪同時図示法の第2法での応力円兼歪円(第36図)は，第42図で応力座標原点O_σが点ζに一致した場合(すなわち $\sigma_3=0$ なる場合)に，角度 $\gamma=90°$ なるとき，Mohr 円3が Mohr 円IIIに一致した Mohr 円の特例で，二次的応力円兼歪円の特例でもある．また，平面歪の場合の応力兼歪円は，第 42 図で，歪座標原点O_εが点ζに一致した場合(すなわち $\varepsilon_3=0$ なる場合)に，角度，$\gamma=90°$ なるときの Mohr 円IIIである．

平面応力の場合には，$\sigma_3=0$ であるから，$\sigma_1+\sigma_2=p$ と書けば，

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_1-\frac{\nu}{E}p=\frac{1}{2G}\left(\sigma_1-\frac{\nu}{1+\nu}p\right)\\
\varepsilon_2&=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_2-\frac{\nu}{E}p=\frac{1}{2G}\left(\sigma_2-\frac{\nu}{1+\nu}p\right)\\
\varepsilon_3&=-\frac{\nu}{E}p
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(a)}$$

なる関係式が成立し，また，平面歪の場合には，$\varepsilon_3=0$ であるから，

$$\varepsilon_3=0=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_3-\frac{\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

$$\therefore \quad \sigma_3=\nu(\sigma_1+\sigma_2)$$

したがって，

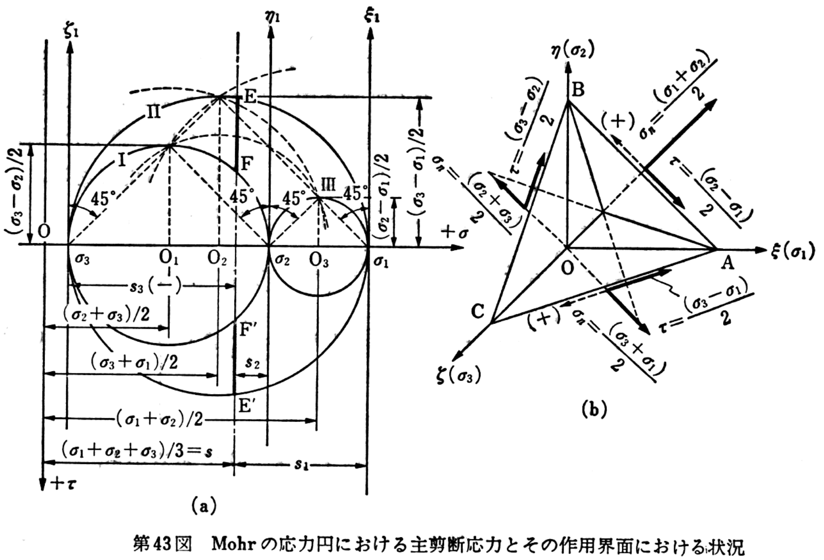
$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1&=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_1-\frac{\nu}{E}(1+\nu)(\sigma_1+\sigma_2)=\frac{1}{2G}(\sigma_1-\nu p)\\
\varepsilon_2&=\frac{(1+\nu)}{E}\sigma_2-\frac{\nu}{E}(1+\nu)(\sigma_1+\sigma_2)=\frac{1}{2G}(\sigma_2-\nu p)\\
\varepsilon_3&=0 \qquad (\sigma_3=\nu p)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(b)}$$

なる関係が成立する.

ゆえに，平面応力状態と，平面歪状態とが，同時に成立するためには，上記の(a),(b)両式から $p=0$ でなければならないことがわかるが，このことは，第42図において，一般に歪座標原点 O_ε と応力座標原点 O_σ とが一致するときには，$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ でなければならないことが，ただちにわかり，したがって，歪座標原点 O_ε と，応力座標原点 O_σ とが同時に点 ζ に一致するとき，すなわち両座標原点が一致することと，$\sigma_3=0$ なることとが同時に成立つためには，$\sigma_1+\sigma_2=p=0$ でなければならないことからも容易に理解される.

1.6.5　主剪断応力座標網

偏差応力テンソルで垂直応力成分が0となるような，直交三界面の法線で作られる直交三軸は，第43図(a)の $\overline{\mathrm{EF}}$ 及び $\overline{\mathrm{E'F'}}$ 上にある諸点のうち，それぞれの点に対する方向係数，$l=\cos\alpha,\ m=\cos\beta,\ n=\cos\gamma$ が互いに直交するような値の三点として表され，その三点の示す縦座標値が，そのときの偏差純剪断応力値を示す.



第43図　Mohrの応力円における主剪断応力とその作用界面における状況

一方，主剪断応力値は，O_1, O_2, O_3 を通る縦線が，それぞれI，II，III円と交わる点に相当する．したがって，偏差応力テンソルで垂直応力成分が0となり，偏差純剪断応力となる場合の剪断応力と，主剪断応力とは，一般に相異なるものであることは前にも述べた通りである．主剪断応力が作用する面の法線の方向余弦は，主応力方向の ξ, η, ζ 座標軸に関して，次のような値である(第

43 図(b)参照).

$(0,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2},\ 0,\ 1/\sqrt{2})$, $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2},\ 0)$

上記のような方向余弦の法線をもつ面が，主応力面，ξ-面，η-面，及び ξ-面と交わって作る BCA なる面は，本章第3節で述べた八面体面にとることができる．主応力面のうちの一つ，たとえば ζ-面だけを考えると，これは ξ 軸及び η 軸を両座標軸とするデカルト座標系であって，ξ 軸に 45° 及び 135° の角度をなす方向線は，主剪断応力線であるから，このような ζ-面だけの subspace では，主剪断応力線は直交座標網を形成する．このことは ξ-面及び η-面，それぞれの subspace でも同様である．

しかしながら，第 43 図(b)からわかるように，主剪断応力の作用する三つの界面で形成される三次元的座標網は，主応力線座標網と異なり，直交座標網ではなく，また，主剪断応力面に作用する垂直応力成分も，等方応力 s ではない．

1.6.6 二次形式の変換とその標準形

第 1.2.8 節において，二次曲面とその標準形について述べたが，その際は，二次方程式の係数を一定とし，位置ベクトルの先端座標(x, y, z)《ただし，一般に斜交直線座標系とする》は，方程式を満足する任意の値とした．今回はこれを別な面から考察することとする．すなわち，(ξ, η, ζ) を**単位の位置ベクトル**の先端座標とし，まず，(ξ, η, ζ) について二次の項のみから成る式（これを二次形式とよぶ）を考え，この二次形式が，単位ベクトル $\{\xi\ \eta\ \zeta\}$ の方向の変化によって変化する場合の関数を次のように Φ とする．

$$a_{11}\xi^2+a_{22}\eta^2+a_{33}\zeta^2+2(a_{12}\xi\eta+a_{13}\xi\zeta+a_{23}\eta\zeta)=\Phi \qquad (1.6.21)$$

上式の左辺のような形をとる量は，弾性学などでは，しばしば現れる．たとえば内部歪エネルギー a は，等方体の場合，

$$a=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}$$

$$=\frac{1}{2}(\sigma^{11}\varepsilon_{11}+\sigma^{22}\varepsilon_{22}+\sigma^{33}\varepsilon_{33}+2\sigma^{12}\varepsilon_{12}+2\sigma^{13}\varepsilon_{13}+2\sigma^{23}\varepsilon_{23})$$

$$=\frac{1}{2E}\{\sigma_x{}^2+\sigma_y{}^2+\sigma_z{}^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\}+\frac{1}{2G}(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2)$$

（ただし，デカルト座標系とする）

$$=\frac{1}{2E}\{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2+\sigma_3{}^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\}$$

（ただし，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はそれぞれ主応力を示すものとする）

$$=G\left\{\varepsilon_x{}^2+\varepsilon_y{}^2+\varepsilon_z{}^2+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)^2+2(\varepsilon_{xy}{}^2+\varepsilon_{yz}{}^2+\varepsilon_{zx}{}^2)\right\}$$

(ただし，デカルト座標系とする)

$$=G\left\{\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2+\varepsilon_3{}^2+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)^2\right\}$$

(ただし，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ はそれぞれ主歪を示すものとする)

のように二次形式として示される《ただし，この場合は$\{\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3\}$または$\{\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\}$は単位ベクトルではない》.

さて，(1.6.21)式は，

$$\{\xi\ \eta\ \zeta\}\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix}=\Phi \tag{1.6.22}$$

なる形に書換えることができる．上記(1.6.22)式は，たとえば，$[a_{ij}]$ を応力テンソルとし，$\{\xi, \eta, \zeta\}$ を単位ベクトルとすれば，ベクトル $\{\xi, \eta, \zeta\}$ を法線とする単位面積に作用する合応力の，作用面に垂直な成分の大きさを表している．以下，便宜上，二次形式の係数で作られるテンソル $[a_{ij}]$ を応力テンソルに見立てて，考察を進めることとする．

今，(1.6.22)式の対称テンソル $[a_{ij}]$ の単位固有ベクトルを，基底ベクトルとして座標系の変換を行えば，このテンソルは，第1.2.7節で述べたように対角化されるから，結局(1.6.22)式は，

$$\{\xi'\ \eta'\ \zeta'\}\cdot\begin{bmatrix} \lambda_{(1)}g_{1'1'} & & 0 \\ & \lambda_{(2)}g_{2'2'} & \\ 0 & & \lambda_{(3)}g_{3'3'} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Bmatrix}=\Phi' \tag{1.6.23}$$

$$\text{i.e.,}\quad \lambda_{(1)}g_{1'1'}(\xi')^2+\lambda_{(2)}g_{2'2'}(\eta')^2+\lambda_{(3)}g_{3'3'}(\zeta')^2$$
$$\equiv\lambda_{(1)}(\xi')^2+\lambda_{(2)}(\eta')^2+\lambda_{(3)}(\zeta')^2=\Phi'$$

のように表される．

ここに，(ξ', η', ζ')座標系はデカルト座標系である．(1.6.22)式のΦは，前述のように，ベクトル$\{\xi\ \eta\ \zeta\}$を法線とする単位面積に作用する合応力の，作用面に垂直な成分の大きさを表しているので，単位ベクトル $\{\xi\ \eta\ \zeta\}$ の方向が定まれば，実際に物理的に一定なスカラー量を示すこととなるから，座標系の変換によって変化することはなく，$\Phi'=\Phi$ である．すなわち，(1.6.23) 式は，

$$\lambda_{(1)}(\xi')^2+\lambda_{(2)}(\eta')^2+\lambda_{(3)}(\zeta')^2=\Phi \tag{1.6.24}$$

のように表されることとなる．上記，(1.6.24)式は，二次形式の標準形とよば

れている.

(1.6.22)式を標準形に直すには，第1.2.5節で述べたように，テンソルの固有値及び固有ベクトルを求めればよい．すなわち，簡単のために旧座標系もデカルト座標系とすれば，固有値を求めるための固有方程式は，

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & (a_{22}-\lambda) & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & (a_{33}-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

である．この固有方程式を

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

のように表せば，その係数 I_1, I_2, I_3 は，

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11}) - (a_{12}{}^2 + a_{23}{}^2 + a_{13}{}^2)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

である．これらの量は，**デカルト座標系についての**二次形式の不変量である．また，前述のように Φ は，単位ベクトル $\{\xi\ \eta\ \zeta\} \equiv \{\xi'\ \eta'\ \zeta'\}$ の方向が定まれば，座標系の変換によっては変らない量であるが，単位ベクトル $\{\xi\ \eta\ \zeta\} \equiv \{\xi'\ \eta'\ \zeta'\}$ の方向が変ればそれに伴って変る関数である．

今，Φ が方向係数 (ξ', η', ζ') と共に変化する場合の Φ の範囲について考えてみよう．

$\lambda_{(1)} \geqq \lambda_{(2)} \geqq \lambda_{(3)}$ とすると，(1.6.24)式から，

$$\lambda_{(1)}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) \geqq \Phi \geqq \lambda_{(3)}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)$$

なる関係が成立する．ところが $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ であるから，上記の関係は，もとの座標系についても，同じ関係が成立っている．すなわち，

$$\lambda_{(1)}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \geqq \Phi \geqq \lambda_{(3)}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

$$\text{i.e.,} \quad \lambda_{(1)} \geqq \Phi \geqq \lambda_{(3)} \tag{1.6.25}$$

この Φ の限界は，これ以上狭くできない．実際，$\xi' = \pm 1$，$\eta' = 0$，$\zeta' = 0$ のときには，(1.6.24)式から $\Phi = \lambda_{(1)}$ となり，また，$\xi' = 0$，$\eta' = 0$，$\zeta' = \pm 1$ のときは，$\Phi = \lambda_{(3)}$ となる．したがって，上式(1.6.25)は実際に等号のときもありうる．したがって，

1) $\lambda_{(1)} > 0$，$\lambda_{(2)} > 0$，$\lambda_{(3)} > 0$ とすれば，$\Phi > 0$ である．すなわち，この場合

には，

$$\lambda_{(1)} \geqq \Phi \geqq \lambda_{(3)} > 0$$

このような二次形式は正値(positive value)であるという．

2)　$\lambda_{(1)}<0$，$\lambda_{(2)}<0$，$\lambda_{(3)}<0$ とすれば，$\Phi<0$ である．すなわち，この場合には，

$$0 > \lambda_{(1)} \geqq \Phi \geqq \lambda_{(3)}$$

このような二次形式は負値(negative value)であるという．

以上，二つの場合は，本節で後述する楕円型形式の場合であるが，この場合には，Φ の値は，単位ベクトルの変化にかかわらず常に正値であるか，負値であるかのいずれかである．

3)　$\lambda_{(1)}>0$，$\lambda_{(2)}<0$，$\lambda_{(3)}<0$ とすれば，Φ の値は，単位ベクトルの方向変化に伴って，一方では正，他方では負の限界，すなわち $\lambda_{(1)}, \lambda_{(3)}$ の間に挟まれる．$\Phi>0$ のときは，後述の二葉双曲型となり，$\Phi<0$ のとき後述の一葉双曲型となる．

4)　$\lambda_{(1)}>0$，$\lambda_{(2)}>0$，$\lambda_{(3)}<0$ とすれば，Φ の値は，3) の場合と同様に，単位ベクトルの方向変化に伴って，一方では正，他方では負の限界，すなわち $\lambda_{(1)}, \lambda_{(3)}$ の間に挟まれるが，$\Phi>0$ のときは一葉双曲型となり，$\Phi<0$ のとき二葉双曲型となる．

5)　$\lambda_{(1)}$，$\lambda_{(2)}$，$\lambda_{(3)}$ のうち，少なくとも一つが0に等しいとき，すなわち $I_3=0$ のときは，二次形式は，後述の柱面型となる．

さて，二次形式，(1.6.21)式または，(1.6.24)式の両辺を $|\Phi|$ で除して得られる式，

$$\frac{1}{|\Phi|}\{a_{11}\xi^2+a_{22}\eta^2+a_{33}\zeta^2+2(a_{12}\xi\eta+a_{23}\eta\zeta+a_{13}\xi\zeta)\}=\pm 1$$

または，
$$\frac{1}{|\Phi|}\{\lambda_{(1)}(\xi')^2+\lambda_{(2)}(\eta')^2+\lambda_{(3)}(\zeta')^2\}=\pm 1$$

において，$(\xi/\sqrt{|\Phi|},\ \eta/\sqrt{|\Phi|},\ \zeta/\sqrt{|\Phi|})$ または $(\xi'/\sqrt{|\Phi|},\ \eta'/\sqrt{|\Phi|},\ \zeta'/\sqrt{|\Phi|})$ を，それぞれ，(x, y, z)，(x', y', z') とおいて得られる式，

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2(a_{12}xy+a_{23}yz+a_{13}xz)=\pm 1 \\ \text{または，}\quad \lambda_{(1)}x'^2+\lambda_{(2)}y'^2+\lambda_{(3)}z'^2=\pm 1 \end{array}\right\} \qquad (1.6.26)$$

は，いずれも，二次曲面を表す式である．この場合，

$$I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=\lambda_{(1)}\lambda_{(2)}\lambda_{(3)}$$

は，二次曲面の判別式とよばれ，周知のように，二次曲面は，

(a)　$\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ のすべてが0でなく，しかも同符号のとき，二次形式は

楕円型

(b) $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ のすべてが0でなく，そのなかに異符号のものがあるとき，二次形式は双曲型

(c) $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$ のうち少なくとも，一つが0に等しいとき，すなわち$I_3=0$ なるときは，二次形式は放物型

となる．ただし，二次曲面の方程式が(1.6.26)式のように，一次項を欠く場合には，上記(c)の場合には，放物型の極限として，柱面型が存在するのみであることに注意を要する．楕円型二次形式の場合には，(1.6.26)式で右辺が +1 の場合か，あるいは，−1 の場合かのいずれか一つの場合だけが現実にありうることになる．双曲型の場合には，(1.6.26)式の右辺の値は，(x', y', z') の値の変化に伴って《したがってまた，(x, y, z)の変化に伴って》+1 及び −1 の二つの場合が現実にありうることになる．すなわち，双曲型の場合には，二次曲面は，一定な二葉双曲面及び一葉双曲面の両方が，ベクトル$\{x\ y\ z\}$または，$\{x'\ y'\ z'\}$の変化に伴って，同時に存在しうることになる．さらに柱面型二次形式の場合には，0でない残りの二つの固有値が同符号であるか，または異符号であるかによって，それぞれ楕円型，または双曲型となる．もし三つの固有値の二つが同時に0となる場合には，二次曲面は，単に新座標軸面に平行な一対の平面となる．

さらに，二次曲面(1.6.26)式の第1式に一次項及び常数項がつけ加わった一般の二次曲面の方程式

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2(a_{12}xy+a_{13}xz+a_{23}yz)+2(a_{01}x+a_{02}y+a_{03}z)+a_{00}=0 \tag{1.6.27}$$

について考えると，これは，すでに第1.2.8節で述べたようにして，標準形に直すことができるが，また，次のようにしてもよい．すなわち，まず，二次形式部分の三次不変量 $I_3=\lambda_{(1)}\lambda_{(2)}\lambda_{(3)}\neq 0$ なる楕円型または双曲型の場合には，

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{01}=0 \\ a_{12}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{02}=0 \\ a_{13}x+a_{23}y+a_{33}z+a_{03}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.6.28}$$

なる方程式は，解を有するので，その解を

$$x=a, \qquad y=b, \qquad z=c$$

とする．この座標点 (a, b, c) に，座標原点を移動し，座標軸を平行移動する．そうすると，(1.6.27)式は，それに$(x=a+X,\ y=b+Y,\ z=c+Z)$ を代入して，

$$\begin{aligned} &a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+2(a_{12}XY+a_{13}XZ+a_{23}YZ) \\ &\quad=-\{a_{00}+(a_{01}a+a_{02}b+a_{03}c)\} \end{aligned} \tag{1.6.29}$$

のような形になる．上式は，(1.6.26)式の第1式と同形である．ただし，今回

は，$\lambda_{(1)}$，$\lambda_{(2)}$，$\lambda_{(3)}$ のいずれも 0 でない場合であるから，(1.6.26)式のうち(c)なる場合を除いた場合となる．

また，$I_3=\lambda_{(1)}\lambda_{(2)}\lambda_{(3)}=0$ なる放物型の場合には，$\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$のうち，少なくとも一つは 0 に等しい．今，$\lambda_{(3)}=0$，$\lambda_{(1)}\neq 0$，$\lambda_{(2)}\neq 0$ であるとしよう．固有ベクトルの方向余弦を (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3) とし，固有ベクトルを新基底ベクトルとする座標系へ，座標系を変換すれば，二次形式部分は，

$$\lambda_{(1)}x'^2+\lambda_{(2)}y'^2+\lambda_{(3)}z'^2\equiv\lambda_{(1)}x'^2+\lambda_{(2)}y'^2 \qquad (\because\ \lambda_{(3)}=0)$$

となり，一次形式部分は，この場合の座標系変換関係式

$$\left.\begin{aligned} x&=l_1x'+l_2y'+l_3z' \\ y&=m_1x'+m_2y'+m_3z' \\ z&=n_1x'+n_2y'+n_3z' \end{aligned}\right\}$$

から，

$$\begin{aligned} &2(a_{01}l_1+a_{02}m_1+a_{03}n_1)x'+2(a_{01}l_2+a_{02}m_2+a_{03}n_2)y' \\ &\quad+2(a_{01}l_3+a_{02}m_3+a_{03}n_3)z' \end{aligned}$$

となる．さらに常数項部分は変化しない．このように，固有値のうちの一つだけが 0 である場合には，第1.2.8節と全く同様にして，楕円放物面，双曲放物面(馬の鞍型曲面)，あるいは楕円柱面，双曲柱面を表すことがわかる．さらに，三つの固有値のうち二つが 0 に等しい場合にも，同様にして，二次曲面の方程式は，

$$\lambda_{(1)}x'^2+2(a_{01'}x'+a_{02'}y'+a_{03'}z')+a_{00}=0$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned} a_{01'}&=a_{01}l_1+a_{02}m_1+a_{03}n_1 \\ a_{02'}&=a_{01}l_2+a_{02}m_2+a_{03}n_2 \\ a_{03'}&=a_{01}l_3+a_{02}m_3+a_{03}n_3 \end{aligned}\right\}$$

のような形になる．そこで $(x'+a_{01'}/\lambda_{(1)})=X'$ なるように，座標軸を平行移動すれば，上の二次曲面の方程式は，

$$\lambda_{(1)}X'^2+2(a_{02'}y'+a_{03'}z')+a_{00}-\frac{(a_{01'})^2}{\lambda_{(1)}}=0 \qquad (1.6.30)$$

の形になる．ここで $a_{02'}\neq 0$，$a_{03'}\neq 0$ なるときは，y', z' 軸を X' 軸の周りに，角 α だけ回転させる．ただし，α は，$\cos\alpha=a_{02'}/A$，$\sin\alpha=a_{03'}/A$，$A=\sqrt{(a_{02'})^2+(a_{03'})^2}$ となるようにとるものとする．そうすると，新しい Y' 軸，Z' 軸は，

$$\left.\begin{aligned} Y'&=y'\cos\alpha+z'\sin\alpha=\frac{1}{A}(a_{02'}y'+a_{03'}z') \\ Z'&=-y'\sin\alpha+z'\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

なる関係をもつから，二次曲面の方程式は，

$$\lambda_{(1)}X'^2+2AY'+\left\{a_{00}-\frac{(a_{01'})^2}{\lambda_{(1)}}\right\}=0$$

となることがわかる．こうして得られた座標軸を，さらに Y' 軸方向に平行移動して，

$$2AY'+\left\{a_{00}-\frac{(a_{01'})^2}{\lambda_{(1)}}\right\}=2AY''$$

なるようにとれば，二次曲面の方程式は，終局的に

$$\lambda_{(1)}X'^2+2AY''=0$$

となる．したがって，$a_{02'}\neq 0, a_{03'}\neq 0$ なるときは(1.6.30)式は放物柱面を表していることがわかる．またもし，$a_{02'}\neq 0, a_{03'}=0$ なるときは，

$$2a_{02'}y'+\left\{a_{00}-\frac{(a_{01'})^2}{\lambda_{(1)}}\right\}=2a_{02'}Y'$$

なるように，座標軸を平行移動すれば，二次曲面の方程式は，終局的に

$$\lambda_{(1)}X'^2+2a_{02'}Y'=0$$

なる形に導かれ，(1.6.30)式は，やはり放物柱面を表していることがわかる．

最後に，$a_{02'}=0$，$a_{03'}=0$ のときは，(1.6.30)式は直ちに次の標準形になる．

$$\lambda_{(1)}X'^2+\left\{a_{00}-\frac{(a_{01'})^2}{\lambda_{(1)}}\right\}=0$$

上式は一対の平行な平面(実平面または虚平面)を表していることがわかる．

1.6.7 テンソル二次曲面(Cauchy の二次曲面)

前節で述べたように，デカルト座標系 (ξ,η,ζ) において，単位ベクトルの先端座標を (ξ,η,ζ) とした場合，

$$\{\xi\ \ \eta\ \ \zeta\}\cdot\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}=\Phi$$

なる関数 Φ は，対称テンソル $[a_{ij}]$ を応力テンソルと見立てれば，或る方向の単位面積に作用する合応力の垂直成分の大きさを表すものであった．本節では，そのような物理的意義を強調する意味で，対称テンソル $[a_{ij}]$ の代りに $[\sigma_{ij}]$ なる記号を，また関数 Φ の代りに σ_n なる記号を用いることにする．そうすると，(1.6.22)式は，次のように書き表される．

$$\{\xi\ \ \eta\ \ \zeta\}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{Bmatrix}=\sigma_n \qquad (1.6.31)$$

上式の両辺を $|\sigma_n|$ で割ると，次式が得られる．

$$\left\{\frac{\xi}{\sqrt{|\sigma_n|}}\ \ \frac{\eta}{\sqrt{|\sigma_n|}}\ \ \frac{\zeta}{\sqrt{|\sigma_n|}}\right\}\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\xi/\sqrt{|\sigma_n|}\\ \eta/\sqrt{|\sigma_n|}\\ \zeta/\sqrt{|\sigma_n|}\end{Bmatrix}=\pm 1 \qquad (1.6.32)$$

以上は前節で述べた事柄を，単に記号を変えて書き表しただけであるが，ここで，上記(1.6.32)式の左辺の物理的意義を考えてみると，(1.6.32)式の左辺は，単位ベクトル $\{\xi\ \eta\ \zeta\}$ と同方向の直線上で，絶対値が $1/\sqrt{|\sigma_n|}$ なるベクトルと，この方向を法線とする界面の面積 $1/\sqrt{|\sigma_n|}$ に作用する合応力との dot product を意味している．そこで，単位ベクトル $\{\xi\ \eta\ \zeta\}$ の代りに，

$$\xi/\sqrt{|\sigma_n|}=x, \qquad \eta/\sqrt{|\sigma_n|}=y, \qquad \zeta/\sqrt{|\sigma_n|}=z$$

なる位置ベクトルを用いれば，(1.6.32)式は，

$$\sigma_{11}x^2+\sigma_{22}y^2+\sigma_{33}z^2+2(\sigma_{12}xy+\sigma_{13}xz+\sigma_{23}yz)=\pm 1 \qquad (1.6.33)$$

のように書き表されるが，これは二次曲面の方程式である．この二次曲面を，テンソル $[\sigma_{ij}]$ の“テンソル二次曲面”とよぶ．テンソル二次曲面について次のようなことがいえる．

“座標原点からテンソル二次曲面上の点 (x, y, z) に至る位置ベクトルは，その方向を法線とする単位面積に作用する合応力の垂直成分が $|\sigma_n|=1/(x^2+y^2+z^2)$ なる絶対値を有することを示す”．

さらに，上記の垂直成分の向きは次のようにして判定することができる．すなわち，応力テンソル $[\sigma_{ij}]$ の固有値(主応力)を符号をも含めて大きいものから順番に $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とし，単位の固有ベクトルを基底ベクトルとする新デカルト座標系での単位の位置ベクトルを $\{\xi'\ \eta'\ \zeta'\}$ とすれば，第1.2.7節の所論から，この新デカルト座標系では，テンソル $[\sigma_{ij}]$ は対角化されるから，(1.6.31)式は変換されて，

$$\{\xi'\ \eta'\ \zeta'\}\cdot\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_3\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\xi'\\ \eta'\\ \zeta'\end{Bmatrix}=\sigma_n \qquad (1.6.34)$$

のように表される．上記の(1.6.34)式の両辺を $|\sigma_n|$ で割って，$\xi'/\sqrt{|\sigma_n|}=x'$, $\eta'/\sqrt{|\sigma_n|}=y'$, $\zeta'/\sqrt{|\sigma_n|}=z'$ とおけば，(1.6.33)式を得たときと同様にして，次式が得られる．

$$\sigma_1(x')^2+\sigma_2(y')^2+\sigma_3(z')^2=\pm 1 \qquad (1.6.35)$$

上式(1.6.35)は，単位の固有ベクトルを基底ベクトルとする新デカルト座標系に座標系の変換を行った場合の(1.6.33)式である．前節の所論から，

1) $\sigma_1\geqq\sigma_2\geqq\sigma_3>0$ または，$0>\sigma_1\geqq\sigma_2\geqq\sigma_3$ のときは，二次曲面(1.6.33)式または，(1.6.35)式は，楕円型曲面を示し，前者のときは $\sigma_n>0$，後者のときは $\sigma_n<0$ である．
2) $\sigma_1>0>\sigma_2\geqq\sigma_3$ のときは，(1.6.33)式または(1.6.35)式は，双曲型曲面を示し，二次曲面の二葉双曲面分枝では $\sigma_n>0$，二次曲面の一葉双曲面分枝では $\sigma_n<0$ である．

3) $\sigma_1 \geqq \sigma_2 > 0 > \sigma_3$ のときは，(1.6.33)式または(1.6.35)式は，双曲型曲面を示し，二次曲面の一葉双曲面分枝では $\sigma_n > 0$，二次曲面の二葉双曲面分枝では $\sigma_n < 0$ である.

4) $\sigma_1 \geqq \sigma_2 > \sigma_3 = 0$ のときは，(1.6.33)式または(1.6.35)式は，楕円型柱面を示し，$\sigma_n > 0$ である.

5) $\sigma_1 > \sigma_2 = 0 > \sigma_3$ なるときは，(1.6.33)式または(1.6.35)式は，双曲型柱面を示し，x' 軸の方へ延びた双曲線分枝柱面上では $\sigma_n > 0$，z' 軸の方へ延びた双曲線分枝柱面上では $\sigma_n < 0$ である.

6) $\sigma_1 = 0 > \sigma_2 \geqq \sigma_3$ なるときは，(1.6.33)式または(1.6.35)式は，楕円型柱面を示し，$\sigma_n < 0$ である.

7) $\sigma_1 > 0 = \sigma_2 = \sigma_3$ なるときは，(1.6.33)式または(1.6.35)式は，平面を示し，$\sigma_n > 0$ である.

8) $\sigma_1 = \sigma_2 = 0 > \sigma_3$ なるときは，(1.6.33)式または(1.6.35)式は，平面を示し，$\sigma_n < 0$ である.

さらにまた，主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ をそれぞれ等方応力 s と偏差主応力 s_1, s_2, s_3 とに分かち，

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & & 0\\ & s & \\ 0 & & s\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s_1 & & 0\\ & s_2 & \\ 0 & & s_3\end{bmatrix}\\ (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\dfrac{1}{3}=s, \qquad \sigma_1=s+s_1, \qquad \sigma_2=s+s_2, \qquad \sigma_3=s+s_3\end{array}\right\}$$

とすれば，(1.6.34)式に対応して，次の2式を得る.

$$\left.\begin{array}{ll} & s(\xi')^2+s(\eta')^2+s(\zeta')^2=s \qquad \text{i.e.,} \quad (\xi')^2+(\eta')^2+(\zeta')^2=1\\ \text{及び} & s_1(\xi')^2+s_2(\eta')^2+s_3(\zeta')^2=s_n\end{array}\right\}$$

上式の第1式は $\{\xi' \ \eta' \ \zeta'\}$ が単位ベクトルであるから当然のことである. 上式から，等方応力及び偏差応力のそれぞれのテンソルについて(1.6.35)式に対応して，次の二つの二次曲面を得る.

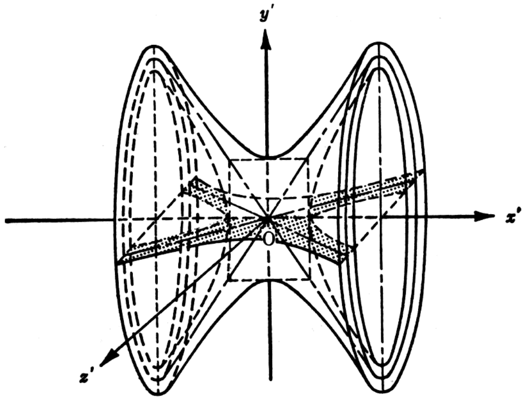
$$(x')^2+(y')^2+(z')^2=\frac{1}{|s|} \tag{1.6.36}$$

及び

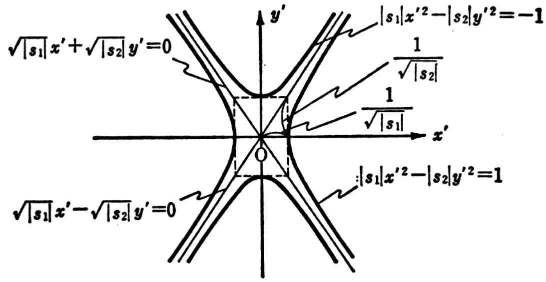
$$s_1(x')^2+s_2(y')^2+s_3(z')^2=\pm 1 \tag{1.6.37}$$

(1.6.36)式は，(半径)$=(1/\sqrt{|s|})$ なる球面を表し，一方，座標原点から二次曲面(1.6.37)式上の点 (x', y', z') に至る位置ベクトルは，その方向の法線をもつ単位面積に作用する偏差合応力の垂直成分が，$1/\{(x')^2+(y')^2+(z')^2\}$ なる絶対値を有することを示す.

(1.6.37)式における s_1, s_2, s_3 は偏差主応力であるから，$s_1+s_2+s_3=0$ であっ



第44図　偏差応力テンソルの二次曲面
($s_1>0$, $s_2<0$, $s_3<0$ なる場合)



第45図　偏差応力テンソル二次曲面の $x'y'$ 断面
($s_1>0$, $s_2<0$, $s_3<0$ なる場合)

て，そのため，(1.6.37)式は常に，双曲型二次曲面を表す式である．二葉双曲面または一葉双曲面上で原点から無限遠にある点では，$s_n \to 0$ であって，この無限遠点はまた，

$$s_1(x')^2+s_2(y')^2+s_3(z')^2=0 \qquad (1.6.38)$$

なる漸近楕円錐曲面上の無限遠点と同一である(第44図参照)．すなわち，(1.6.38)式を満足するベクトル $\{x'\ y'\ z'\}$ の方向を法線とする界面では，常に偏差垂直応力 $s_n=0$ で，偏差純剪断応力のみが作用することがわかる．

(i)　$s_1>0$，$s_2<0$，$s_3<0$ なる場合(第44図)

等方応力 s の，界面に対する方向は，もちろん $(s_1+s_2+s_3)/3>0$ ならば $s>0$，$(s_1+s_2+s_3)/3<0$ ならば $s<0$ である．

偏差垂直応力 s_n の，界面に対する方向は，(x', y', z') 点が二葉双曲面上にあるときには，$s_n>0$，(x', y', z') 点が一葉双曲面上にあるときには，$s_n<0$ である．

楕円錐面(1.6.38)式と，$z'=0$ 及び $y'=0$ なる二つの平面との交わりは，

$$\left.\begin{aligned} s_1x'^2+s_2y'^2=0 \\ s_1x'^2+s_3z'^2=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.6.39}$$

であり，また $x'=k$ なる平面と，楕円錐面(1.6.38)式との交わりは，

$$-(s_2y'^2+s_3z'^2)=s_1k^2 \tag{1.6.40}$$

である．(1.6.39)式は，二つの漸近線を示し，(1.6.40)式は，一つの楕円を示している．楕円錐面上の3点，(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) のそれぞれと，座標原点とを結ぶ3直線が互いに垂直な条件は，

$$\left.\begin{aligned} X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0 \\ X_2X_3+Y_2Y_3+Z_2Z_3=0 \\ X_3X_1+Y_3Y_1+Z_3Z_1=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.6.41}$$

である．また，上記の3点は，いずれも楕円錐面上にあるから，

$$\left.\begin{aligned} s_1(X_1)^2+s_2(Y_1)^2+s_3(Z_1)^2=0 \\ s_1(X_2)^2+s_2(Y_2)^2+s_3(Z_2)^2=0 \\ s_1(X_3)^2+s_2(Y_3)^2+s_3(Z_3)^2=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.6.42}$$

(ただし，s_1, s_2, s_3 は与えられた偏差主応力である)

を満足しなければならない．(1.6.41)式及び(1.6.42)式は，$(X_1 : Y_1 : Z_1)$, $(X_2 : Y_2 : Z_2)$, $(X_3 : Y_3 : Z_3)$ なる6個の未知の比率に関する6個の方程式であると考えることができる．6個の未知数に対して，6個だけの条件式があるわけであるから，われわれは，常に6個の未知比率を求めることができる《楕円錐の頂角は $x'y'$ 面または $x'z'$ 面のいずれでも直角より大きいから，(1.6.41)式及び(1.6.42)式は連立方程式として常に解を有する》．すなわち，楕円錐面上に，先端座標をもつ位置ベクトルで，互いに直交する三つの軸方向の組合せは，常に存在することがわかる．ゆえに次のようにいうことができる．

“一般に直交3軸を，偏差応力楕円錐曲面上に設定することは，常に可能であって，このような直交3軸の1組を座標軸とする座標系では，偏差応力テンソル s_{ij} は，常に，

$$\begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & 0 & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

のような形に表される”．

(ii) $s_1>0$, $s_2>0$, $s_3<0$ なる場合

等方応力 s の，界面に対する方向は，(i)の場合と同じである．偏差垂直応力 s_n の，界面に対する方向は，点(x', y', z')が一葉双曲面《z' 軸方向に延びて

いない双曲線面》上にあるとき，$s_n>0$，点(x', y', z')が二葉双曲面《z'軸方向に延びている双曲線面》上にあるとき，$s_n<0$である．その他の所論は，(i)の場合と同様である．

(iii)　$s_2=0$，$s_1=-s_3>0$ なる場合

等方応力 s については，前述の(i)，(ii)項と同じ．偏差垂直応力の曲面は，y'軸を軸とする双曲線柱面で，偏差垂直応力の界面に対する方向は，x'軸方向に延びている双曲線分枝柱面上では，$s_n>0$，z'軸の方向に延びている双曲線分枝柱面上では，$s_n<0$ である．双曲線柱面の漸近線は，$x'z'$ 面上で，x' 軸と 45°の傾きをなす次の2直線である．

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x' \pm \frac{1}{\sqrt{2}}z' = 0$$

したがって，この場合，双曲線柱面上で選びうる直交3軸は，ただ1組あるだけである．この直交3軸を座標軸とする座標系では，偏差応力テンソルの trace 上の成分はすべて0となる．

以上，本節では，対称テンソル $[a_{ij}]$ を，応力テンソル $[\sigma_{ij}]$ と見立てて，その物理的意義の一般的考察を行ってきたが，テンソル$[a_{ij}]$が特に，第1.2.9節例2で述べた，慣性相乗モーメント・テンソルである場合についての考察をつけ加えておくことにする．

慣性相乗モーメント・テンソルでは，その trace 上の成分は，x 座標値または y 座標値または z 座標値のそれぞれの2乗を体積素片 dv について積分したものであるから，固有ベクトル方向を座標軸としたデカルト座標系 (x', y', z') では trace 上の成分のみが残り，それらは，上述の理由ですべて正でなければならぬ．すなわち主慣性モーメントはすべて正である．したがって，このテンソルのテンソル二次曲面は，常に楕円体曲面である．今，任意の直交3軸を (x, y, z) とし，このデカルト座標系による慣性相乗モーメント・テンソルをとって，その trace 上にある成分を考えると，その逆数は，テンソル二次曲面(楕円体面)と，直交3軸とが交わる点をそれぞれ $(x, 0, 0)\equiv(x_1', y_1', z_1')$，$(0, y, 0)\equiv(x_2', y_2', z_2')$，$(0, 0, z)\equiv(x_3', y_3', z_3')$で表すものとすれば，それぞれ $(x_1')^2+(y_1')^2+(z_1')^2$，$(x_2')^2+(y_2')^2+(z_2')^2$，$(x_3')^2+(y_3')^2+(z_3')^2$ である．すなわち，直交3座標面に対する慣性半径の逆数は，直交3座標面の法線と，テンソル二次曲面(楕円体面)とが交わる点を先端とする三つの位置ベクトルの絶対値の二乗に等しいことがわかる．

1.6.8　応力楕円体(Lamé の応力楕円体)

主応力軸を座標軸とするデカルト座標系では，主応力(偏差主応力でないこ

とに注意)をそれぞれ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とすれば，単位の位置ベクトル $\{\xi' \ \eta' \ \zeta'\}$ を法線とする界面での合応力 $\boldsymbol{F}$ は，

$$\boldsymbol{F}=\begin{Bmatrix} F_{\xi'} \\ F_{\eta'} \\ F_{\zeta'} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{Bmatrix} \tag{1.6.43}$$

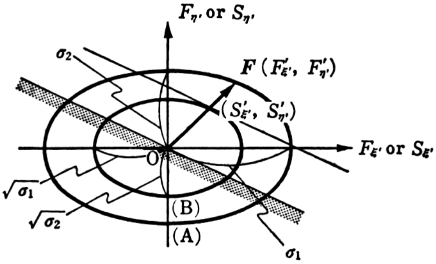
である．したがって，

$$F_{\xi'}=\sigma_1\xi', \qquad F_{\eta'}=\sigma_2\eta', \qquad F_{\zeta'}=\sigma_3\zeta' \tag{1.6.44}$$

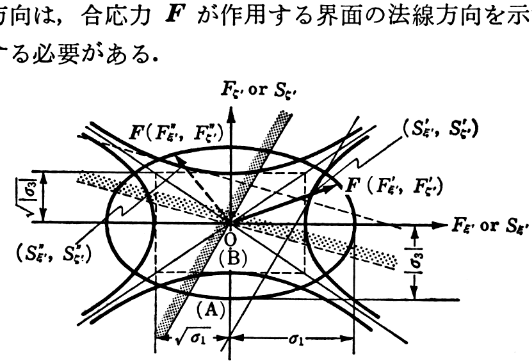
ゆえに，主応力方向を座標軸とするデカルト座標系 $\{\xi', \ \eta', \ \zeta'\}$ では，次式が応立する．

$$\left(\frac{F_{\xi'}}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{F_{\eta'}}{\sigma_2}\right)^2+\left(\frac{F_{\zeta'}}{\sigma_3}\right)^2=1 \tag{1.6.45}$$

上式(1.6.45)式は，$F_{\xi'}, F_{\eta'}, F_{\zeta'}$ をそれぞれ ξ' 軸，η' 軸，ζ' 軸の方向の座標値としてとれば，デカルト座標系(ξ', η', ζ')において，常に一つの楕円体を与える方程式である．この楕円体を，第一応力楕円体 (first stress ellipsoid) または Lamé の応力楕円体 (Lamé's stress ellipsoid) という《第 46 図 (A)》．これによって物体内の或る点における合応力 $\boldsymbol{F}$ は，その作用する界面を回転するとき，常に連続的に，楕円体の中心から周辺に至る動径と等しいことがわかり，また三つの主応力のなかには，このような合応力の中で最大値または最小値の応力に相当するものを含んでいることがわかる．ただしこの楕円体の動径の方向は，合応力 $\boldsymbol{F}$ が作用する界面の法線方向を示すものではないことに注意する必要がある．



第46図 第一応力楕円体面及び第二応力二次曲面 ($\sigma_1>\sigma_2>0$, $\sigma_3=0$ なる場合)



第47図 第一応力楕円体面及び第二応力二次曲面 ($\sigma_1>0$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3<0$ なる場合)

合応力 $\boldsymbol{F}$ が作用する界面の法線方向の(単位)ベクトル $\{\xi'\ \eta'\ \zeta'\}$ を求めるには次のようにすればよい．すなわち，前節のテンソル二次曲面の場合と同様にして，

$$\sigma_1(\xi')^2+\sigma_2(\eta')^2+\sigma_3(\zeta')^2=\sigma_n$$

また(1.6.44)式から，

$$\xi'=\frac{F_{\xi'}}{\sigma_1},\qquad \eta'=\frac{F_{\eta'}}{\sigma_2},\qquad \zeta'=\frac{F_{\zeta'}}{\sigma_3} \tag{1.6.46}$$

したがって，

$$\frac{(F_{\xi'})^2}{\sigma_1}+\frac{(F_{\eta'})^2}{\sigma_2}+\frac{(F_{\zeta'})^2}{\sigma_3}=\sigma_n$$

$$\therefore\quad \frac{1}{|\sigma_n|}\left\{\frac{(F_{\xi'})^2}{\sigma_1}+\frac{(F_{\eta'})^2}{\sigma_2}+\frac{(F_{\zeta'})^2}{\sigma_3}\right\}=\pm 1$$

上式において，$F_{\xi'}/\sqrt{|\sigma_n|}=S_{\xi'}$, $F_{\eta'}/\sqrt{|\sigma_n|}=S_{\eta'}$, $F_{\zeta'}/\sqrt{|\sigma_n|}=S_{\zeta'}$ とおけば，

$$\frac{(S_{\xi'})^2}{\sigma_1}+\frac{(S_{\eta'})^2}{\sigma_2}+\frac{(S_{\zeta'})^2}{\sigma_3}=\pm 1 \tag{1.6.47}$$

を得る．この(1.6.47)式は，座標 $(S_{\xi'}, S_{\eta'}, S_{\zeta'})$ について，二次曲面を表す方程式であって，$(S_{\xi'} : S_{\eta'} : S_{\zeta'})$ の方向は $(F_{\xi'} : F_{\eta'} : F_{\zeta'})$ に等しい．上記(1.6.47)式で表された二次曲面を第二応力二次曲面(second stress conic)とよぶ《第46図)(B)》.

さて，(1.6.47)式が表す第二応力二次曲面上の点 $(S_{\xi'}{}', S_{\eta'}{}', S_{\zeta'}{}')$ における接平面の方程式は，

$$\frac{S_{\xi'}S_{\xi'}{}'}{\sigma_1}+\frac{S_{\eta'}S_{\eta'}{}'}{\sigma_2}+\frac{S_{\zeta'}S_{\zeta'}{}'}{\sigma_3}=\pm 1 \tag{1.6.48}$$

であるが，この接平面の法線の方向係数を (l, m, n) とすれば，

$$\begin{aligned} l : m : n &= (S_{\xi'}{}'/\sigma_1) : (S_{\eta'}{}'/\sigma_2) : (S_{\zeta'}{}'/\sigma_3) \\ &= (F_{\xi'}{}'/\sigma_1) : (F_{\eta'}{}'/\sigma_2) : (F_{\zeta'}{}'/\sigma_3) \\ &= \xi' : \eta' : \zeta' \qquad 《\because (1.6.46)\text{式による}》 \end{aligned}$$

である．しかるに(1.6.43)式からわかるように，ベクトル $\{\xi'\ \eta'\ \zeta'\}$ は合応力 $\boldsymbol{F}$ の作用界面の法線の方向係数である．すなわち，合応力 $\boldsymbol{F}$ の作用界面の法線方向は，第二応力二次曲面の接平面の法線方向と等しい．換言すれば，合応力 $\boldsymbol{F}$ の作用界面と，第二応力二次曲面の接平面とは平行である．そうして

1)　$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \sigma_3 > 0$ なるときは，(1.6.47) 式は右辺が，(＋) 符号のときのみ成立し，第二応力二次曲面は，楕円体面となる．このとき接平面の方向係数は $F_{\xi'}{}' : F_{\eta'}{}' : F_{\zeta'}{}'$ と同符号である．

2)　$\sigma_1 \geqq \sigma_2 > 0$, $\sigma_3 < 0$ なるときは，(1.6.47) 式の右辺は，(±) 両符号ともに存在し，(＋) 符号のとき，(1.6.47) 式は一葉双曲面を，また (－) 符号のとき，(1.6.47)式は二葉双曲面を表す．接平面の方向係数は，$(F_{\xi'}{}') : (F_{\eta'}{}') : (-F_{\zeta'}{}')$ と同符号である．

3) $\sigma_1>0$, $0>\sigma_2\geqq\sigma_3$ なるときは，(1.6.47)式の右辺は，(±)両符号ともに存在し，(+)符号のとき，(1.6.47)式は二葉双曲面を，また(−)符号のとき，(1.6.47)式は一葉双曲面を表す．接平面の方向係数は，$(F_{\xi'})$：$(-F_{\eta'})$：$(-F_{\zeta'})$と同符号である．

4) $0>\sigma_1\geqq\sigma_2\geqq\sigma_3$ なるときは，(1.6.47)式は，右辺が(−)符号のときのみ存在し，第二応力二次曲面は，楕円体面となる．このとき接平面の方向係数は，$(-F_{\xi'})$：$(-F_{\eta'})$：$(-F_{\zeta'})$と同符号である．

5) $\sigma_1\geqq\sigma_2>0$, $\sigma_3=0$ なるときは，(1.6.47)式は，右辺が(+)符号のときのみ存在し，第二応力二次曲面は，ζ'軸を軸とする楕円柱面となる．このときの接平面の方向係数は，$F_{\xi'}$：$F_{\eta'}$：0 と同符号である(第46図参照)．

6) $\sigma_1>0, \sigma_2=0, \sigma_3<0$ なるときは，(1.6.47)式の右辺は，(±)両符号ともに存在し，いずれも η' 軸を軸とする双曲線柱面を表す．そのうち，(+)符号のときは，ξ' 軸の方向に延びる双曲線分枝柱面を，また(−)符号のときは，ζ' 軸方向に延びる双曲線分枝柱面を示す．接平面の方向係数は，$(F_{\xi'})$：0：$(-F_{\zeta'})$と同符号である(第47図参照)．

7) $\sigma_1=0$, $0>\sigma_2\geqq\sigma_3$ なるときは，(1.6.47)式は，右辺が(−)符号のときのみ存在し，第二応力二次曲面は，ξ'軸を軸とする楕円柱面となる．このときの接平面の方向係数は，0：$(-F_{\eta'})$：$(-F_{\zeta'})$と同符号である．

8) $\sigma_1>0$, $\sigma_2=\sigma_3=0$ なるときは，(1.6.47)式は，右辺が(+)符号のときのみ存在し，第二応力二次曲面は，$\eta'\zeta'$平面に平行な二つの平面となる．接平面の方向係数は$(F_{\xi'})$：0：0 と同符号である．

9) $\sigma_1=\sigma_2=0$, $\sigma_3<0$ なるときは，(1.6.47)式は，右辺が(−)符号のときのみ存在し，第二応力二次曲面は，$\xi'\eta'$面に平行な二つの平面となる．接平面の方向係数は，0：0：$(-F_{\zeta'})$と同符号である．

1.6.9 合応力の逆数楕円体

主応力方向を座標軸としたデカルト座標系で，単位の位置ベクトルを，$\{\xi' \ \eta' \ \zeta'\}$とすれば，このベクトルを法線とする単位面積に作用する合応力$\boldsymbol{F}$は，

$$\boldsymbol{F}=\begin{Bmatrix}F_{\xi'}\\F_{\eta'}\\F_{\zeta'}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \sigma_2 & \\ 0 & & \sigma_3\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\xi'\\\eta'\\\zeta'\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1\xi'\\\sigma_2\eta'\\\sigma_3\zeta'\end{Bmatrix}$$

$$\therefore\quad (\sigma_1\xi')^2+(\sigma_2\eta')^2+(\sigma_3\zeta')^2=F^2 \qquad (1.6.49)$$

ただし，F は合応力 $\boldsymbol{F}$ の絶対値とする．

今，$\xi'/F=x'$, $\eta'/F=y'$, $\zeta'/F=z'$ とおけば，上式(1.6.49)は次のように表される．

$$(\sigma_1)^2(x')^2+(\sigma_2)^2(y')^2+(\sigma_3)^2(z')^2=1 \qquad (1.6.50)$$

上式(1.6.50)は，$1/|\sigma_1|$，$1/|\sigma_2|$，$1/|\sigma_3|$を，それぞれ座標軸方向の半軸長として有する楕円体の方程式である．したがって，われわれは次のようにいうことができる．

“合応力 $\boldsymbol{F}$ の作用界面の法線方向と同方向で，かつ合応力 $\boldsymbol{F}$ の絶対値 F の逆数を絶対値とする位置ベクトル$\{x'\ y'\ z'\}$の先端は，座標軸上に，それぞれ$1/|\sigma_1|$，$1/|\sigma_2|$，$1/|\sigma_3|$ を半軸長として有する楕円体面上にある”．

すなわち，われわれは，合応力 $\boldsymbol{F}$ の絶対値が，合応力の作用界面の方向変化に伴って，空間的にどのように変化するかを，具体的に了解することができる．しかし，この方法では，合応力の絶対値と，その作用界面の方向を知ることはできるが，合応力そのものが，作用界面に対して，どのような方向にあるかを知ることができない欠点がある．

第1.7章　ベクトルの微分

ベクトルの微分には2通りがある．その一つは，ベクトル関数をスカラーの変数によって単に数値的に微分するもので，基本的にはスカラー関数を微分する通常の微分と同じである．スカラー関数は，場所的な要因を含んでいないから，単に数値的に微分を行えばよいことはもちろんであるが，これと同様に，ベクトル関数のスカラー変数による微分も，次節に述べるように，単に数値的な微分を行えばよい．しかし，ベクトル関数の微分のもう一つは，ベクトル関数を，座標成分を変数として幾何学的に微分する（有向性場所的微分をする）もので，単に数値的に微分するというように簡単な取扱いをすることはできない．

1.7.1　ベクトルのスカラー変数による微分

ベクトル関数をスカラー変数によって微分するには，ベクトル成分をスカラー変数によって，単に数値的に微分し，それに，このときに使用した座標系の基底ベクトルを dot product すればよい．

何となれば，まずデカルト座標系では上述の演算が正しいことは明らかである．次に，一般座標系では，デカルト座標系で行った微分結果に対して座標系の変換を行えばよいから，デカルト座標系を (i', j', k')，一般座標系を (i, j, k) とし，スカラー変数を t とすれば，ベクトル $\boldsymbol{v}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}=v^i\boldsymbol{g}_i$ の t による微分は，

$$\boldsymbol{v}_{,t}=(v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'})_{,t}=\frac{\partial v^{i'}}{\partial t}\boldsymbol{g}_{i'}=\left\{\frac{\partial}{\partial t}(v^i\beta^{i'}_i)\right\}\boldsymbol{g}_j\beta^j_{i'}$$

$$=\frac{\partial v^i}{\partial t}\cdot\boldsymbol{g}_j\beta^{i'}_i\beta^j_{i'}=\frac{\partial v^i}{\partial t}\boldsymbol{g}_j\delta^j_i$$

$$=\frac{\partial v^i}{\partial t}\boldsymbol{g}_i \tag{1.7.1}$$

となるからである．したがって，スカラー変数による高次微分についても，次式が成立する．

$$\frac{\partial^n\boldsymbol{v}}{\partial t^n}=\frac{\partial^n v^i}{\partial t^n}\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial^n v_i}{\partial t^n}\boldsymbol{g}^i \tag{1.7.2}$$

一般に，スカラー関数の通常の微分と同様に，次の関係式が成立する．

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\pm\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.7.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha \boldsymbol{A})=\frac{\partial \alpha}{\partial t}\boldsymbol{A}+\alpha\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{1.7.4}$$

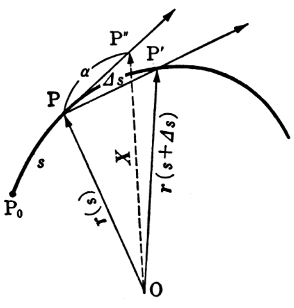
$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.7.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.7.6}$$

ただし，上の(1.7.3)式～(1.7.6)式は，微分を実施するときの変数が，座標成分であるとき，すなわち後述の共変微分(幾何学的微分)の場合にも成立する．

1.7.2　ベクトルのスカラー変数による微分の空間曲線論への応用

空間に一つの曲線が与えられている場合に，その上の一定点 P_0 を出発点として，この曲線に沿って一定の向きに測った弧の長さを s とすれば，この s は単に長さを数量的に表したスカラーと考えることができ，曲線上の点の位置は，スカラー変数 s によって定められる．したがって，空間に一定点Oを定めて，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおけば，$\boldsymbol{r}$ はスカラー変数 s の関数となる．これを $\boldsymbol{r}(s)$ で表す．



第48図　空間曲線の接線

(i)　接線と法平面

$\boldsymbol{r}(s)$ の s に関する導ベクトル $d\boldsymbol{r}/ds$ は，その定義

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)}{\Delta s}$$

から明らかなように，Pにおける曲線への接線(tangent)を表している．しかも，ベクトル $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)-\boldsymbol{r}(s)$ の長さ，すなわち弦 PP′ の長さと，Δs との比，すなわち弦 PP′ の長さと弧 PP′ の長さとの比の極限は1であるから，上の $d\boldsymbol{r}/ds$ は単位ベクトルである．したがって，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\boldsymbol{t}$$

とおけば，$\boldsymbol{t}$ は点Pにおける曲線の弧の増す方向へ向いた，単位ベクトルである．ゆえに，点Pにおける接線の方程式は，

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{r}+\alpha\boldsymbol{t} \tag{1.7.7}$$

ただし，

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{dx^i}{ds}\cdot\boldsymbol{g}_i$$

$\boldsymbol{X}$：原点Oから，接線上の任意の点へ向かう位置ベクトル

α：点Pから接線上の任意の点 P″ までの長さを表す媒介変数

と書くことができる．上式(1.7.7)を成分表示で書けば，

$$X^i \boldsymbol{g}_i = x^i \boldsymbol{g}_i + \alpha \frac{dx^i}{ds} \boldsymbol{g}_i$$

$$\text{i.e.,} \quad X^1 = x^1 + \alpha \frac{dx^1}{ds}, \qquad X^2 = x^2 + \alpha \frac{dx^2}{ds}, \qquad X^3 = x^3 + \alpha \frac{dx^3}{ds}$$

したがって，一般に，接線の方程式は，

$$\frac{X^1 - x^1}{\left(\dfrac{dx^1}{ds}\right)} = \frac{X^2 - x^2}{\left(\dfrac{dx^2}{ds}\right)} = \frac{X^3 - x^3}{\left(\dfrac{dx^3}{ds}\right)} \tag{1.7.8}$$

《ただし，(x^1, x^2, x^3)は，空間曲線上の点Pの座標とする》

次に点Pで，Pにおける接線に垂直な平面，すなわち法平面 (normal plane) のベクトル方程式は，$d\boldsymbol{r}/ds$ と $(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r})$ とが互いに垂直な関係から，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \cdot (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{r}) = 0 \tag{1.7.9}$$

（ただし，$\boldsymbol{X}$ は原点Oから平面上の任意の点へ向かう位置ベクトルとする）

である．したがって，これをベクトル成分で表せば，一般に，

$$\frac{dx^i}{ds}(X_i - x_i) = 0 \quad \text{または} \quad \frac{dx_i}{ds}(X^i - x^i) = 0$$

$$\text{i.e.,} \quad \frac{dx^1}{ds}(X_1 - x_1) + \frac{dx^2}{ds}(X_2 - x_2) + \frac{dx^3}{ds}(X_3 - x_3) = 0 \tag{1.7.10}$$

《ただし，(x^1, x^2, x^3)または(x_1, x_2, x_3)は，空間曲線上の点Pの座標とする》

(1.7.8)式及び(1.7.10)式は，曲線の方程式として，次のような形式

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= f^1(s) \\ x^2 &= f^2(s) \\ x^3 &= f^3(s) \end{aligned}\right\} \quad \text{または} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(s) \\ x_2 &= f_2(s) \\ x_3 &= f_3(s) \end{aligned}\right\} \tag{1.7.11}$$

が与えられた場合のことであるが，もしも曲線の方程式として，

$$\left.\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ G(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

のような形式が与えられた場合には，

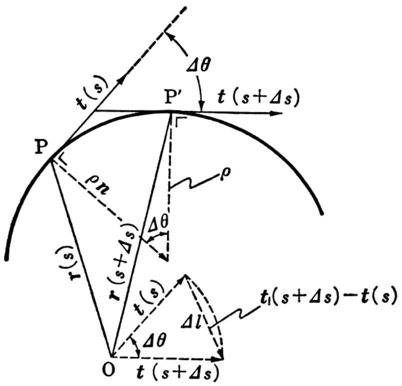
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial G}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial s} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

より，

$$\frac{dx_1}{ds} : \frac{dx_2}{ds} : \frac{dx_3}{ds}$$

なる比を求めて，

$$\frac{dx_1}{ds}(X^1 - x^1) + \frac{dx_2}{ds}(X^2 - x^2) + \frac{dx_3}{ds}(X^3 - x^3) = 0$$



第49図　空間曲線の曲率

なる方程式を作ればよい.

(ii)　曲率と主法線

曲線上の一点P($\boldsymbol{r}(s)$)における接線$\boldsymbol{t}(s)$と，Pに近接した点$\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$における接線$\boldsymbol{t}(s+\Delta s)$とのなす角を$\Delta\theta$とするとき，この曲線の一点Pにおける曲率$\kappa=1/\rho$を，次のように定義する.

$$\kappa=\left(\frac{1}{\rho}\right)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| \quad (1.7.12)$$

すなわち，曲線上を点が進むとき，対応する接線が回転する角の進んだ距離に対する割合の極限として，曲率を定義する.

空間の原点Oを通って，単位ベクトル$\boldsymbol{t}(s)$及び$\boldsymbol{t}(s+\Delta s)$を表す有向線分を引けば，そのなす角は$\Delta\theta$であって，ベクトル$\boldsymbol{t}(s+\Delta s)-\boldsymbol{t}(s)$の長さを$\Delta l$とすれば，$\lim_{\Delta\theta\to 0}\dfrac{\Delta l}{\Delta\theta}=1$(長さ)である．したがって，

$$\frac{\boldsymbol{t}(s+\Delta s)-\boldsymbol{t}(s)}{\Delta s}$$

の大きさは，$\Delta l/\Delta s=\dfrac{\Delta l}{\Delta\theta}\cdot\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$であることに注意すれば，ベクトル

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\boldsymbol{t}(s+\Delta s)-\boldsymbol{t}(s)}{\Delta s}=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}$$

の大きさは，

$$\left(\lim_{\Delta\theta\to 0}\left|\frac{\Delta l}{\Delta\theta}\right|\right)\left(\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|\right)=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\kappa$$

であることがわかる．したがって，

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=\kappa\cdot\boldsymbol{n}=\frac{1}{\rho}\cdot\boldsymbol{n} \quad (1.7.13)$$

とおくことができ，$\boldsymbol{n}$は単位ベクトル(no dimension)となる．しかも$\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t}=1$を$s$で微分して得られる$\boldsymbol{t}\cdot d\boldsymbol{t}/ds=0$から明らかなように，$\boldsymbol{t}$と$\boldsymbol{n}$とは互いに垂直である．このベクトル$\boldsymbol{n}$の表す方向を，われわれは，点Pにおける曲線の主法線(principal normal)とよぶ.

さらにわれわれは，曲線上の点Pを通り，Pにおける接線と主法線を含む平面を，接触平面 (osculating plane) とよぶ．したがって接触平面の方程式はGrassmann のスカラー三重積の記号を用いて，三つのベクトル$(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r}),\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}$

が共面である条件から,

$$[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r}),\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}]=0 \qquad (1.7.14)$$

$$\text{i.e.,}\quad \left[(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r}),\frac{d\boldsymbol{r}}{ds},\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\right]=0 \qquad (1.7.15)$$

である.

成分表示で書けば, 曲率は, (1.7.13)式から,

$$\kappa=\frac{1}{\rho}=\sqrt{\frac{d^2(x^1)}{ds^2}\cdot\frac{d^2(x_1)}{ds^2}+\frac{d^2(x^2)}{ds^2}\cdot\frac{d^2(x_2)}{ds^2}+\frac{d^2(x^3)}{ds^2}\cdot\frac{d^2(x_3)}{ds^2}} \qquad (1.7.16)$$

と表され, 接触平面は, (1.7.15)式から一般に次のように表される.

$$\begin{vmatrix}(X^1)-(x^1) & \dfrac{d(x^1)}{ds} & \dfrac{d^2(x^1)}{ds^2}\\ (X^2)-(x^2) & \dfrac{d(x^2)}{ds} & \dfrac{d^2(x^2)}{ds^2}\\ (X^3)-(x^3) & \dfrac{d(x^3)}{ds} & \dfrac{d^2(x^3)}{ds^2}\end{vmatrix}=0 \qquad (1.7.17)$$

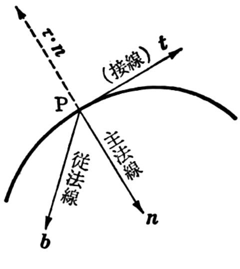
ただし, 上記(1.7.16)式及び(1.7.17)式の丸括弧内の文字の添字は, 各成分の variance を示すものとする.

(iii) 捩率と従法線

曲線上の一点Pにおける接線ベクトルを $\boldsymbol{t}$, 主法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば,

$$\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b} \qquad \text{(no dimension)} \qquad (1.7.18)$$

は, 接触平面に垂直な単位ベクトルであって, 曲線上の一点 P における従法線 (binormal) とよばれる.



第50図 接線, 主法線, 従法線, 及び捩率

曲線上の一点 $\boldsymbol{r}(s)$ における接触平面と, 近接点 $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$ における接触平面とのなす角を $\Delta\varphi$ とするとき, すなわち $\boldsymbol{b}(s)$ と $\boldsymbol{b}(s+\Delta s)$ とのなす角を $\Delta\varphi$ とするとき,

$$\tau=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

で定義される値を, この曲線上の一点における捩率 (torsional ratio) とよぶ. 換言すれば, 曲線上を点が進むとき, 対応する接触平面が, 回転する角の, 点の進んだ距離に対する割合の極限を, 捩率と定義する.

前と同様にして, ベクトル $d\boldsymbol{b}/ds$ の大きさは, ちょうど $|\tau|$ に等しいことが証明される. ところが,

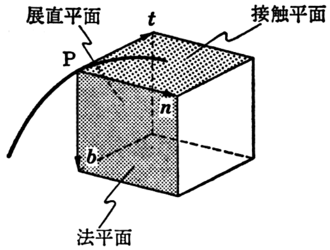
$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{d}{ds}(\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n})=\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\kappa\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$$
$$=\boldsymbol{t}\times\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$$

であるから，$d\boldsymbol{b}/ds$ は $\boldsymbol{t}$ に垂直である．また，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=1$ を s で微分した式 $\boldsymbol{b}\cdot(d\boldsymbol{b}/ds)=0$ からわかるように，$d\boldsymbol{b}/ds$ は $\boldsymbol{b}$ にも垂直である．したがって，$d\boldsymbol{b}/ds$ は $\boldsymbol{n}$ の方向を向いている．そこでわれわれは，τ の符号を

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\tau\cdot\boldsymbol{n} \tag{1.7.19}$$

が成立するように定めるものとする．

(iv) Frenet-Serret の公式



第51図 接触平面，法平面，展直平面の関係

われわれは，空間曲線上の一点 P で，三つの単位ベクトル，接線 $\boldsymbol{t}$，主法線 $\boldsymbol{n}$，従法線 $\boldsymbol{b}$ を定義した．そして主法線と従法線の定める平面を法平面，接線と主法線の定める平面を接触平面とよんだ．この場合，さらに接線と従法線の定める平面を，展直平面 (rectifying plane) とよぶ．

さて，われわれはすでに，

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\kappa\cdot\boldsymbol{n},\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\tau\cdot\boldsymbol{n}$$

であることを知っている．今，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{t}$ であることを利用して，これを曲線に沿って微分すれば，

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\times\boldsymbol{t}+\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=-\tau(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{t})+\kappa(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n})=\tau\boldsymbol{b}-\kappa\cdot\boldsymbol{t}$$

を得る．したがって，われわれは，

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\kappa\boldsymbol{n} \tag{1.7.20}$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\kappa\boldsymbol{t}+\tau\boldsymbol{b} \tag{1.7.21}$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=-\tau\boldsymbol{n} \tag{1.7.22}$$

を得るが，これらは空間曲線論において最も重要な Frenet-Serret の公式である．

1.7.3 質点の運動

空間を一つの質点Pが運動する場合，空間に一点Oを定めて，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおけば，$\boldsymbol{r}$ は時間 t の関数である．これをわれわれは，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ で表すことにする．$\boldsymbol{r}$ をOを原点とするデカルト座標系で表せば，

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

（ただし，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は座標軸方向の単位ベクトルとする）

であって，x,y,z もまた，t の関数である．

（i） 粒子速度及び粒子加速度

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}$$

とおけば，$\boldsymbol{v}$ はこの質点の速度を表すベクトルである．これは個々の粒子に固着した速度であるから，粒子速度ともよばれる．

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dt}\cdot\boldsymbol{t}$$

であるから，今この質点の速度の大きさを v で表せば，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}=v\cdot\boldsymbol{t}\\&v=\frac{ds}{dt}\end{aligned}\right\}\qquad(1.7.23)$$

である．次に，

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{a}$$

とおけば，$\boldsymbol{a}$ は質点の加速度を表すベクトルである．これも上記の $\boldsymbol{v}$ と同様に個々の粒子に固着した加速度であるから，粒子加速度ともよばれている．

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+v\cdot\frac{d\boldsymbol{t}}{dt}=\frac{dv}{dt}\cdot\boldsymbol{t}+v\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a}=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{t}+\kappa v^2\cdot\boldsymbol{n}\qquad(1.7.24)$$

（ただし，κ は点Pにおける質点の軌道の曲率）

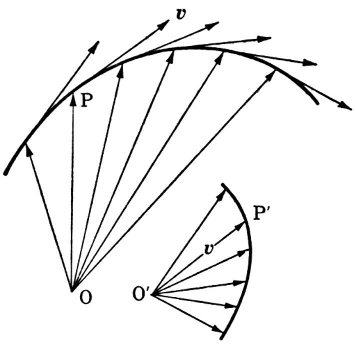
したがって，質点の加速度ベクトルは，軌道の接線方向と，主法線方向とに分解され，その成分は，それぞれ dv/dt 及び κv^2 である．

（ii） ホドグラフ (Hodograph)

ある質点の運動が $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ で表されているとき，空間に一定点 O′ を定め，

$$\overrightarrow{\mathrm{O'P'}}=\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$$

なる有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{O'P'}}$ を引くとき，点 P′ の軌跡は，この運動のホドグラフ (hodograph) とよばれる．



第52図 質点の速度とそのホドグラフ

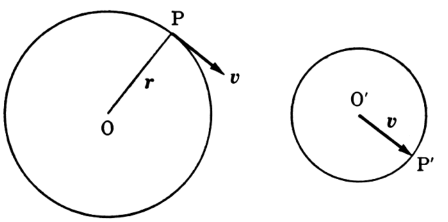
直線上を一様な速度で運動する質点に対しては，$\boldsymbol{v}$ は一定であるから，そのホドグラフは，定点 P′ である．

また，直線上を一様な加速度で運動する質点に対しては，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0=\text{const.}$ であるから，

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}_0 t+\boldsymbol{v}_0$$

であって，$\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{v}_0$ は同方向をもっているから，そのホドグラフは，質点の軌道に平行な一つの直線である．

さらに，円周上を一様な速度で運動する質点に対しては，速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は同一平面上にあって，$|\boldsymbol{v}|=\text{const.}$ であるから，そのホドグラフは，やはり一つの円周である．この場合，前項の結果得られた(1.7.24)式



第53図 円周上を一様な速度で運動する質点のホドグラフ

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\cdot\boldsymbol{t}+\kappa\cdot v^2\cdot\boldsymbol{n}$$

において，$v=\text{const.}$，$\kappa=1/r$ であるから，

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{v^2}{r}\cdot\boldsymbol{n}$$

ゆえに，P′ 点の速度，すなわちP点の加速度の大きさは v^2/r である．ただし，ここに r は，元の円周の半径である．

(iii) Newton 力(中心力)による質点の運動

質点Pが一定点Oに向かい，OP の自乗に反比例する力の作用を常に受けている場合について，質点の運動を研究してみよう．$\overrightarrow{\text{OP}}=\boldsymbol{r}$ とおけば，上の法則は，

$$\boldsymbol{F}=m\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\frac{k}{|\boldsymbol{r}|^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{k}{r^3}\cdot\boldsymbol{r} \qquad (1.7.25)$$

と書かれる．ここに m は質点の質量，k は比例定数，r は $\boldsymbol{r}$ の絶対値である．もし k が正であれば問題の力は斥力，負ならば引力である．

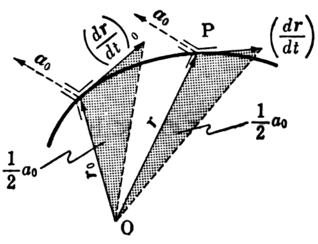
後述するように，或るスカラー量 ϕ を，座標成分 x^i で微分し，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\boldsymbol{g}^i=\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\boldsymbol{g}^1+\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\boldsymbol{g}^2+\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\boldsymbol{g}^3$$

なる演算によって，ベクトル$\boldsymbol{u}$が得られる場合，すなわち，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\boldsymbol{g}^1+\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\boldsymbol{g}^2+\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\boldsymbol{g}^3=\boldsymbol{u}$$

なる場合には，ϕをベクトル$\boldsymbol{u}$のスカラー・ポテンシャルとよんでいる．Newton 力 $\boldsymbol{F}=k(\boldsymbol{r}/r^3)$ はスカラー・ポテンシャル $\phi=-k/r$ を有する．また，遠心力 $\boldsymbol{F}=mr\omega^2$ はスカラー・ポテンシャル$\phi=mr^2\omega^2/2$ を有する．



第54図　Newton力と面積速度

まず，ベクトル$\boldsymbol{r}$と(1.7.25)式の両辺との外積を考えることによって，

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{r}\times\left(\frac{k}{r^3}\boldsymbol{r}\right)=0$$

であることがわかる．したがって，

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{a}_0=\text{const.} \tag{1.7.26}$$

を得る．《∵　(1.7.26)式を t で微分すれば，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}+\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=0$$

となることから確かめられるが，直接次のように部分積分法を用いても証明される．

$$\int\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)dt=\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}-\int\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)dt=\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}》$$

上式(1.7.26)は，運動の方程式(1.7.25)が，一般に，

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=f(r)\cdot\boldsymbol{r} \tag{1.7.27}$$

なる形のときには，いつも成立する式であって，運動は，定ベクトル $\boldsymbol{a}_0$ に垂直な平面内で起り，動径 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が単位時間内に画く面積 $1/2(\boldsymbol{r}\times(d\boldsymbol{r}/dt)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})$ は一定 $1/2(\boldsymbol{a}_0)$であることを示している．

さて，$\boldsymbol{r}$ と(1.7.26)式の両辺との外積を考えて，

$$\boldsymbol{r}\times\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0$$

$$\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0 \qquad 《∵\ (1.4.62)式による》$$

$$\therefore\ \left(r\cdot\frac{dr}{dt}\right)\boldsymbol{r}-r^2\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_0$$

$$\therefore\ \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\cdot\boldsymbol{r}-\frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{a}_0$$

$$\therefore \quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{a}_0$$

を得る．一方，運動の方程式(1.7.25)の両辺と $\boldsymbol{a}_0$ との外積を考えれば，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\boldsymbol{a}_0=k\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{a}_0\right)$$

が得られる．この式に上に得られた式を代入して，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\boldsymbol{a}_0=-k\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

したがって，これを積分して，

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{m}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

を得る．ただし，$\boldsymbol{b}_0$ は一つの定ベクトルであって，$\boldsymbol{a}_0$ に垂直である．

さて，定ベクトル $\boldsymbol{a}_0$ と上式の両辺との外積を考えれば，

$$\boldsymbol{a}_0\times\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{a}_0\right)=\boldsymbol{a}_0\times\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{m}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$$(\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{a}_0)\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}-\left(\boldsymbol{a}_0\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{a}_0\times\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{m}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

《∵　(1.4.62)式による》

ところが，$\boldsymbol{a}_0$ と $d\boldsymbol{r}/dt$ とは直交しているから《∵　(1.7.26)式による》，上式で，

$$\left(\boldsymbol{a}_0\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=0$$

$$\therefore \quad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\boldsymbol{a}_0}{a_0{}^2}\times\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{m}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

次に，ベクトル $\boldsymbol{r}$ と上式の両辺との外積を考えれば，

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{r}\times\left\{\frac{\boldsymbol{a}_0}{a_0{}^2}\times\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{m}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\right\}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{a}_0=\boldsymbol{r}\cdot\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{m}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\frac{\boldsymbol{a}_0}{a_0{}^2}-\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_0}{a_0{}^2}\left(\boldsymbol{b}_0-\frac{k}{m}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

《∵(1.7.26)式及び(1.4.62)式による》

しかるにまた，(1.7.26)式によって，上式の右辺第二項の $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_0=0$ である．

したがって，

$$\boldsymbol{a}_0=\left\{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}_0)-\frac{k}{m}\cdot r\right\}\frac{\boldsymbol{a}_0}{a_0{}^2}$$

すなわち，

$$a_0{}^2=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}_0)-\frac{k}{m}r$$

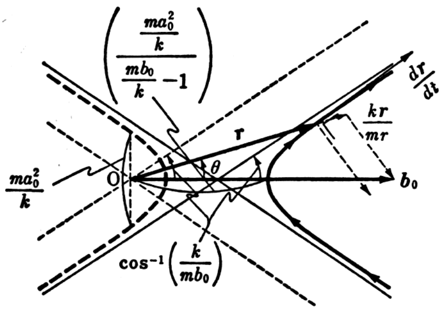
を得る．したがって，ベクトル $\boldsymbol{b}_0$ と $\boldsymbol{r}$ とのなす角を θ とすれば，

$$a_0{}^2=rb_0\cos\theta-\frac{k}{m}r$$

すなわち，
$$r=\frac{-\dfrac{m}{k}a_0{}^2}{1-\dfrac{m}{k}b_0\cos\theta} \tag{1.7.28}$$

ただし，$a_0>0$,　　$b_0>0$,　　$\dfrac{m}{k}\gtrless 0$

を得るが，この式(1.7.28)は焦点を原点とし，離心率 $|mb_0/k|$，通径 $|ma_0{}^2/k|$，なる円錐曲線の極座標方程式である．したがって，質点Pは原点Oを焦点とする一つの円錐曲線を，その軌道として運動することがわかる．　ただし，(1.7.28)式は，誘導の過程において，rを位置ベクトル$\boldsymbol{r}$の絶対値として得られた式であるから，(1.7.28)式においては，$r>0$なる条件がつけられている．



第55図　斥力の場合($k>0$)のNewton力による質点の軌道

（イ）　$k>0$ なる場合(斥力の場合)

$1-\dfrac{m}{k}b_0\cos\theta<0$　であることを要するから，

$$\frac{m}{k}b_0\cos\theta>1,\quad \text{i.e.,}\quad \frac{k}{mb_0}<\cos\theta<1$$

すなわち，$\dfrac{mb_0}{k}>1$　でかつ　$\cos^{-1}\dfrac{k}{mb_0}>|\theta|$ なることが必要である．

したがってこの場合，軌道は双曲線で，その範囲は $|\theta|<\cos^{-1}\dfrac{k}{mb_0}$ の範囲に限定される．

（ロ）　$k<0$ なる場合(引力の場合)

$1-\dfrac{m}{k}b_0\cos\theta>0$ なることを要するから，$\dfrac{m}{k}b_0\cos\theta<1$，すなわち，

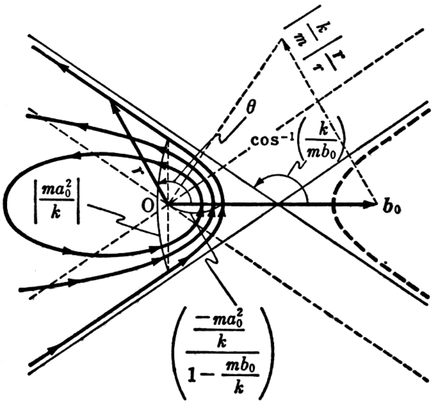
$$\cos\theta>\frac{k}{mb_0}\qquad(\because\quad k<0)$$

したがって，

（a）　$\dfrac{k}{mb_0}<-1$，すなわち $\left|\dfrac{mb_0}{k}\right|<1$ なるときは，$0\leqq\theta\leqq 2\pi$

このとき，軌道は楕円となる．

（b）　$\dfrac{k}{mb_0}=-1$，すなわち $\left|\dfrac{mb_0}{k}\right|=1$ なるときは，$-\pi<\theta<\pi$



第56図　引力の場合($k<0$)のNewton力による質点の軌道

このとき軌道は放物線となる.

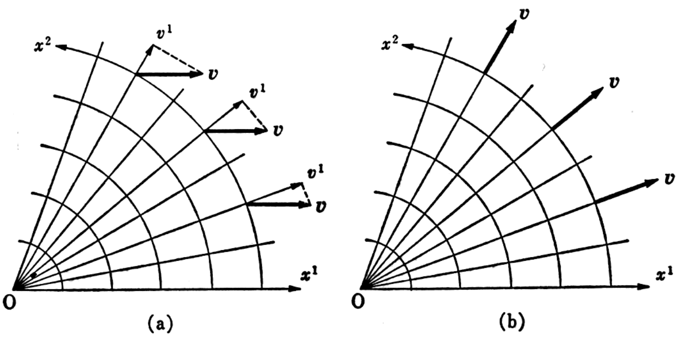
（c）　$0>\dfrac{k}{mb_0}>-1$，すなわち $\left|\dfrac{mb_0}{k}\right|>1$ なるときは，$|\theta|<\cos^{-1}\dfrac{k}{mb_0}$

したがって，このとき軌道は双曲線で，その範囲は，$|\theta|<\cos^{-1}\dfrac{k}{mb_0}$ なる範囲に限定される.

1.7.4　ベクトルの幾何学的微分（有向性場所的微分）

前節までは，ベクトルのスカラー変数による微分について述べた．本節以下では，ベクトルの微分で，その最も重要な部分である幾何学的な微分について述べることにする.

基底ベクトルは，直線座標系では，場所によって異ならないが，曲線座標系



第57図　平面極座標系におけるベクトルとその成分

では，場所によって異なるので，曲線座標系でベクトルを，或る座標成分について微分しようとすれば，一般に，ベクトル成分の変化に対する微分以外に，基底ベクトルの変化に対する微分を考慮しなければならなくなる．

最も簡単な例として，第 57 図に示すような極座標系を考えてみよう．同図(a)に示された三つのベクトル $\boldsymbol{v}$ は相等しいベクトルであるから，これを，どの座標成分について微分しても，その結果は0であるはずである．しかし，これらのベクトルを，半径方向成分と円周方向成分とに分解すると，それらの成分は場所によって変化しているから，これらのベクトル成分だけを，或る座標成分について微分すれば，その結果は0でない値を得る．これはベクトル成分だけの微分をとり，基底ベクトルの微分を考慮に入れなかったからである．また一方，第57図(b)に示された三つのベクトルは，相異なるベクトルであるから，それらを或る座標成分について微分すれば，その結果は，0でない結果が得られるべきである．ところが，それらの半径方向成分及び円周方向成分はそれぞれ，場所によって変化しないので，これらの成分を，座標成分について微分すれば，0なる結果を得る．すなわち，この場合でも，ベクトル成分の変化だけを考慮するのでなく，基底ベクトルの変化についても考慮しなければ，ベクトルの幾何学的微分は得られないことがわかる．

1.7.5 Christoffel の記号

ベクトルを座標成分で微分しようとすれば，ベクトル成分と基底ベクトルとの積の和を微分しなければならない．これはいわば，ベクトルのベクトル的微分を意味するが，これに対して，ベクトル成分だけを微分して，それと基底ベクトルとの積和をとることは，第1.7.3節までに述べたように，ベクトルのスカラー的微分の意味しかもたない．さて，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を，座標成分 x^j で微分すれば，

$$\boldsymbol{v}_{,j}=(v^i\boldsymbol{g}_i)_{,j}=v^i{}_{,j}\boldsymbol{g}_i+v^i\boldsymbol{g}_{i,j} \qquad (1.7.29\text{ a})$$

$$=(v_i\boldsymbol{g}^i)_{,j}=v_{i,j}\boldsymbol{g}^i+v_i\boldsymbol{g}^i{}_{,j} \qquad (1.7.29\text{ b})$$

上式は，座標成分 x^j による，基底ベクトルの偏微分を含んでいる．これらの偏微係数はまた，ベクトルであって，基底ベクトル $\boldsymbol{g}^i$ または $\boldsymbol{g}_i$ に関する成分に分解される．すなわち次のように書くことができる．

$$\boldsymbol{g}_{i,j}=\Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^k=\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k \qquad (1.7.30)$$

上記の Γ_{ijk} または Γ^k_{ij} なる記号を Christoffel の記号とよんでいる．上式に，他の基底ベクトルを dot product すれば，

$$\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l\cdot\boldsymbol{g}_k=\Gamma_{ijl}\delta^l_k=\Gamma_{ijk} \qquad (1.7.31\text{ a})$$

$$\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}^k=\Gamma^l_{ij}\boldsymbol{g}_l\cdot\boldsymbol{g}^k=\Gamma^l_{ij}\delta^k_l=\Gamma^k_{ij} \qquad (1.7.31\text{ b})$$

を得る．(1.7.30)式または，(1.7.31)式は，Christoffel の記号の定義と考えてもよい．Christoffel の記号を，微分公式(1.7.29)に導入するに先立って，ここで若干の有用な公式を導いておこう．(1.7.30)式の第2項及び第3項に，$\boldsymbol{g}_l$ または $\boldsymbol{g}^l$ を dot product すれば，

$$\Gamma_{ijk}\delta_l^k=\Gamma_{ijl}=\Gamma_{ij}^k g_{kl} \qquad (1.7.32\ \mathrm{a})$$

$$\Gamma_{ijk}g^{kl}=\Gamma_{ij}^k\delta_k^l=\Gamma_{ij}^l \qquad (1.7.32\ \mathrm{b})$$

すなわち，Christoffel の記号の第3指標は，ベクトル成分の指標と同様に，g^{kl} または g_{kl} によって上げ下げすることができる．これは Christoffel の記号の第3指標がベクトル成分を示す指標であるからである．しかしながら，(1.7.30)式における Christoffel 記号の下付指標 i 及び j は，g^{ij} または g^{jk} によって，上げることはできない．すなわち Christoffel の記号は，三階のテンソルのようには変換されない．

$\boldsymbol{g}_i$ を x^j で微分すれば，

$$\boldsymbol{g}_{i,j}=\boldsymbol{r}_{,ij}=\boldsymbol{r}_{,ji}=\boldsymbol{g}_{j,i} \qquad (1.7.33)$$

したがって，(1.7.30)式から

$$\Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l=\Gamma_{jil}\boldsymbol{g}^l, \qquad \Gamma_{ij}^l\boldsymbol{g}_l=\Gamma_{ji}^l\boldsymbol{g}_l$$

ゆえに，上式に $\boldsymbol{g}_k$ または $\boldsymbol{g}^k$ を dot product して次式が得られる．

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{jik}, \qquad \Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k \qquad (1.7.34)$$

すなわち，Christoffel 記号は，初めの二つの下付指標について，対称である．
g_{ij} を x^k で微分すれば，

$$g_{ij,k}=\boldsymbol{g}_{i,k}\cdot\boldsymbol{g}_j+\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_{j,k}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{jki} \qquad (1.7.35)$$

ゆえに，
$$\begin{cases}\Gamma_{kij}+\Gamma_{jki}\qquad\qquad\ \ =g_{ij,k} & (\mathrm{a})\\ \Gamma_{kij}\qquad\qquad+\Gamma_{ijk}=g_{jk,i} & (\mathrm{b})\\ \qquad\quad\ \Gamma_{jki}+\Gamma_{ijk}=g_{ki,j} & (\mathrm{c})\end{cases}$$

(b)式と(c)式との和から(a)式を差引いて，次の関係式を得る．

$$2\Gamma_{ijk}=g_{jk,i}+g_{ki,j}-g_{ij,k} \qquad (1.7.36\ \mathrm{a})$$

上式からさらに，

$$2\Gamma_{ij}^k=2\Gamma_{ijh}g^{hk}=g^{hk}(g_{jh,i}+g_{hi,j}-g_{ij,h}) \qquad (1.7.36\ \mathrm{b})$$

上式は，metric tensor の各成分の値が既知であるときに，$(i\,j\,k)$座標系における Christoffel 記号の値を，実際に計算するのに使用せられる．デカルト座標系では，g_{ij} は const. であるから，(1.7.36)式より

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{ij}^k=0$$

さらに，式 $\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=\delta_i^j$ の両辺を x^k で微分すれば，

$$\boldsymbol{g}_{i,k}\cdot\boldsymbol{g}^j+\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j{}_{,k}=0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{g}^j{}_{,k}\cdot\boldsymbol{g}_i=-\boldsymbol{g}_{i,k}\cdot\boldsymbol{g}^j=-\Gamma_{ik}^j$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{g}^j{}_{,k} = -\Gamma^j_{ik}\boldsymbol{g}^i$$

すなわち，
$$\boldsymbol{g}^i{}_{,j} = -\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{g}^k \qquad (1.7.37)$$

1.7.6 共変微分(Covariant derivative)

(1.7.29)式に立ち戻って，(1.7.29)式を

$$\boldsymbol{v}_{,j} = v^i{}_{,j}\boldsymbol{g}_i + v^i\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k$$

のように書き，さらに上式の最後の項の二つの dummy indices i 及び k の記号を交換して，$\boldsymbol{g}_i$ を括弧の外にくくり出せば，次式が得られる．

$$\boldsymbol{v}_{,j} = (v^i{}_{,j} + v^k\Gamma^i_{jk})\boldsymbol{g}_i = v^i|_j\boldsymbol{g}_i \qquad (1.7.38)$$

次の量，

$$v^i|_j = v^i{}_{,j} + v^k\Gamma^i_{jk} \qquad (1.7.39)$$

は，**ベクトル $\boldsymbol{v}$ の座標成分 x^j による微分の i 成分である．** これは，ベクトル $\boldsymbol{v}$ の i 成分の x^j による微分(i 成分の x^j によるスカラー微分)とは異なることに注意しなければならぬ．その相違は $v^k\Gamma^i_{jk}$ なる項があるためである．(1.7.39)式の左辺は，ベクトル $\boldsymbol{v}(v^i)$ の共変微分とよばれているが，**これはベクトル $\boldsymbol{v}$ の幾何学的な微分である．**

また(1.7.37)式を用いて，(1.7.29 b)から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{,j} &= v_{i,j}\boldsymbol{g}^i - v_i\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{g}^k \\ &= v_{i,j}\boldsymbol{g}^i - v_k\Gamma^k_{ji}\boldsymbol{g}^i = (v_{i,j} - v_k\Gamma^k_{ij})\boldsymbol{g}^i \\ &= v_i|_j\boldsymbol{g}^i \end{aligned} \qquad (1.7.40)$$

すなわち，
$$v_i|_j = v_{i,j} - v_k\Gamma^k_{ij} \qquad (1.7.41)$$

なる量もまた，ベクトル $\boldsymbol{v}(v_i)$ の共変微分のもう一つの形態である．

(1.7.38)式，(1.7.39)式及び(1.7.40)式，(1.7.41)式は，物理学の微分方程式を公式化する場合に有用な形式に書き表すことができる．すなわち，

$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{,j}dx^j = dv^i\boldsymbol{g}_i = v^i|_j dx^j\boldsymbol{g}_i \qquad (1.7.42\ \text{a})$$

または，
$$d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{,j}dx^j = dv_i\boldsymbol{g}^i = v_i|_j dx^j\boldsymbol{g}^i \qquad (1.7.42\ \text{b})$$

したがって，
$$\left.\begin{aligned} dv^i &= v^i|_j dx^j \\ dv_i &= v_i|_j dx^j \end{aligned}\right\} \qquad (1.7.43)$$

デカルト座標系では，Γ_{ijk} 及び Γ^k_{ij} はすべて 0 であるから，共変微分と通常の微分との間に相違はなく，$v^i|_j = v_i|_j = v_{i,j} = v^i{}_{,j}$ である．

$v^i|_j$ 及び $v_i|_j$ を共変微分とよぶためには，それらが共変テンソルとしての性質を，たしかにもっているか否かを証明する必要がある．ベクトル $\boldsymbol{v}$ を，第2の新座標系 $x^{i'}$ で，$\boldsymbol{v} = v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}$ のように表し，この式を $x^{j'}$ で微分すれば，

$$\boldsymbol{v}_{,j'} = v_{i',j'}\boldsymbol{g}^{i'} + v_{i'}\boldsymbol{g}^{i'}{}_{,j'} = v_{i'}|_{j'}\boldsymbol{g}^{i'}$$

他方，
$$\boldsymbol{v}_{,j'} = \boldsymbol{v}_{,j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = v_i|_j\boldsymbol{g}^i\beta^j_{j'}$$

$$\therefore \quad v_{i'}|_{j'}\boldsymbol{g}^{i'}=v_i|_j\boldsymbol{g}^i\beta^j_{j'}$$

上式の両辺に $\boldsymbol{g}_{k'}=\beta^k_{k'}\boldsymbol{g}_k$ を dot product すれば，次式が得られる．

$$v_{k'}|_{j'}=v_k|_j\beta^k_{k'}\beta^j_{j'} \tag{1.7.44 a}$$

同様に，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を新座標系で，$\boldsymbol{v}=v^{i'}\boldsymbol{g}_{i'}$ のように表し，この式を $x^{j'}$ で微分すれば，

$$\boldsymbol{v}_{,j'}=v^{i'}{}_{,j'}\boldsymbol{g}_{i'}+v^{i'}\boldsymbol{g}_{i',j'}=v^{i'}|_{j'}\boldsymbol{g}_{i'}$$

また一方，

$$\boldsymbol{v}_{,j'}=\boldsymbol{v}_{,j}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}=v^i|_j\boldsymbol{g}_i\beta^j_{j'}$$

$$\therefore \quad v^{i'}|_{j'}\boldsymbol{g}_{i'}=v^i|_j\boldsymbol{g}_i\beta^j_{j'}$$

上式の両辺に $\boldsymbol{g}^{k'}=\beta^{k'}_k\boldsymbol{g}^k$ を dot product すれば，次式が得られる．

$$v^{k'}|_{j'}=v^k|_j\beta^{k'}_k\beta^j_{j'} \tag{1.7.44 b}$$

(1.7.44 a)式は，$v_k|_j$ が二階のテンソルの共変成分であることを示している．また(1.7.44 b)式は，$v^k|_j$ が二階のテンソルの混変成分（k に関しては反変，j に関しては共変）であることを示している．

ここで注意すべきことは，$v_k|_j$ または $v^k|_j$ は，それぞれ二階のテンソルであるが，$v_{k,j}$，$-v_i\Gamma^i_{kj}$；$v^k{}_{,j}$，$v^i\Gamma^k_{ji}$ の個々のものはテンソルではないことである．

(1.7.44 a)式で $v_i|_j$ が二階のテンソルであることがわかったのであるから，次のような演算が可能である．すなわち，

$$v_i|_jg^{ik}=v^k|_j \tag{1.7.45 a}$$

同様に，

$$v^i|_jg_{ik}=v_k|_j \tag{1.7.45 b}$$

ここでもまた，注意すべきことがある．それは，

$$v_i|_jg^{ik}=v^k|_j=v_ig^{ik}|_j$$

$$v^i|_jg_{ik}=v_k|_j=v^ig_{ik}|_j$$

であって，本節で後述するように，g^{ik} または g_{ik} は，共変微分記号の前にあっても，後にあっても，どちらでもよいが，

$$v_ig^{ik}|_j\neq(v_ig^{ik})_{,j}=v^k{}_{,j}$$

$$v^ig_{ik}|_j\neq(v^ig_{ik})_{,j}=v_{k,j}$$

であることである．

次に，$v_i|_j$ が二階のテンソルであることから，次のような記法を用いても差支えないことがわかる．すなわち，

$$v_i|_jg^{jk}=v_i|^k \tag{1.7.46}$$

上式は，$v_i|^k$ の定義であると考えてよい．$v_i|^k$ はベクトル $\boldsymbol{v}(v_i)$ の反変微分（の i-成分）とよばれるべきものである．しかし，一般に共変微分という術語は，普通に使われているが，反変微分という術語は，あまり使われていない．

反変微分，$v^i|^k\boldsymbol{g}_i$ または $v_i|^k\boldsymbol{g}^i$ は，次のようにして，$\partial\boldsymbol{v}/\partial x_k$ に等しいことが証明でき

る．すなわち，

$$dx_i=dx^jg_{ij}=g_{i1}dx^1+g_{i2}dx^2+g_{i3}dx^3$$

また一方，

$$dx_i=\frac{\partial x_i}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial x_i}{\partial x^2}dx^2+\frac{\partial x_i}{\partial x^3}dx^3$$

ところが，dx^1, dx^2, dx^3 はそれぞれ独立に任意の値をとりうるから，

$$\frac{\partial x_i}{\partial x^1}=g_{i1},\qquad \frac{\partial x_i}{\partial x^2}=g_{i2},\qquad \frac{\partial x_i}{\partial x^3}=g_{i3}$$

一般に，

$$\frac{\partial x_i}{\partial x^j}=g_{ij}=g_{ji}=\frac{\partial x_j}{\partial x^i} \tag{1.7.47 a}$$

なる式が成立する．同様に，

$$dx^i=dx_jg^{ij}=g^{i1}dx_1+g^{i2}dx_2+g^{i3}dx_3$$

また一方，

$$dx^i=\frac{\partial x^i}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial x^i}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial x^i}{\partial x_3}dx_3$$

$$\therefore\quad \frac{\partial x^i}{\partial x_1}=g^{i1},\qquad \frac{\partial x^i}{\partial x_2}=g^{i2},\qquad \frac{\partial x^i}{\partial x_3}=g^{i3}$$

一般に，

$$\frac{\partial x^i}{\partial x_j}=g^{ij}=g^{ji}=\frac{\partial x^j}{\partial x_i} \tag{1.7.47 b}$$

(1.7.47 a)式及び(1.7.47 b)式の結果を応用して，反変微分 $v^i|^k$ または $v_i|^k$ を次のように得ることができる．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_k}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^j}{\partial x_k}&=(v^i|_j\boldsymbol{g}_i)\,g^{jk}=v^i|_jg^{jk}\cdot\boldsymbol{g}_i=v^i|^k\boldsymbol{g}_i\\ \text{or}\quad &=(v_i|_j\boldsymbol{g}^i)\,g^{jk}=v_i|_jg^{jk}\cdot\boldsymbol{g}^i=v_i|^k\boldsymbol{g}^i\end{aligned}\right\} \tag{1.7.48}$$

したがってまた，反変微分には，次のような性質のあることがわかる．すなわち．

$$v_i|^k\boldsymbol{g}^i=v_i|_jg^{jk}\cdot\boldsymbol{g}^i=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}g^{jk}$$

また一方，

$$v_i|^k\boldsymbol{g}^i=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_k}=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j\cdot g_{jk}}$$

$$\therefore\quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}g^{jk}=\underset{\sim\sim\sim}{v_i|_jg^{jk}}\cdot\boldsymbol{g}^i=\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}\,\frac{1}{g_{jk}}=\underset{\sim\sim\sim}{v_i|_j\frac{1}{g_{jk}}}\cdot\boldsymbol{g}^i \tag{1.7.49}$$

次に反変微分に関連して，ここでスカラー微分 $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}(=v^i{}_{,j})$ と $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ $\left(\text{または}\ \frac{\partial v^i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right)$ との関係について，考察してみよう．

$$\underset{\sim\sim}{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}}=\frac{\partial v_i}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x_j}=\frac{\partial (v^lg_{li})}{\partial x^k}\cdot g^{jk}\qquad (\because\ \ (1.7.47\ \text{b})\text{式による})$$

$$=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left\{v^l{}_{,k}\cdot g_{li}+v^l\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}\right\}g^{jk}}$$

$$\underset{\sim\sim}{\frac{\partial v^i}{\partial x_j}}=\frac{\partial v^i}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x_j}=\underset{\sim\sim\sim}{v^i{}_{,k}g^{jk}}$$

$$\underset{\sim\sim}{\frac{\partial v_i}{\partial x^j}}=\frac{\partial (v^kg_{ki})}{\partial x^j}=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{v^k{}_{,j}g_{ki}+v^k\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}}$$

しかしながら，$\frac{\partial v_i}{\partial x^j}=\frac{\partial (v^kg_{ki})}{\partial x^j}\neq(v^kg_{ki})|_j=v_i|_j$ なることはもちろんである．

以上はベクトル関数を，x^i で微分することについて考究したが，次にスカラ

ー関数を，x^iで微分することについて考えてみよう．今，任意のスカラーをϕとすれば，ϕは，その中に基底ベクトルを含んでいないから，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^i}=\phi_{,i}$$

また，第2の新座標系$(i'\ j'\ k')$において，$x^{i'}$についてϕを微分すれば，

$$\phi_{,i'}=\frac{\partial\phi}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial\phi}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}=\phi_{,i}\beta^i_{i'} \tag{1.7.50}$$

上式(1.7.50)は，$\phi_{,i}$が一般のベクトルのように，座標系の変換を受けることを示している．よって次のように書くことができる．

$$\phi_{,i}=\phi|_i \tag{1.7.51}$$

すなわち，スカラーについては，それに対する通常微分と共変微分とは同じである．$\phi|_i$はベクトル成分(i成分)であるから，ベクトル，

$$\boldsymbol{u}=\phi|_i\boldsymbol{g}^i=\mathrm{grad}\,\phi \tag{1.7.52}$$

(ただし，grad ϕについては，第1.8章で，改めて詳説する)は，スカラー場$\phi(x^i)$に存在する或るベクトルを定める．このベクトルを，gradient vector といい，このベクトル場，$\boldsymbol{u}(x^i)$を，gradient field とよぶ．

$$d\phi=\phi_{,i}dx^i=\phi|_i dx^i=\phi|_i\boldsymbol{g}^i\cdot dx^i\boldsymbol{g}_i=(\mathrm{grad}\,\phi)\cdot d\boldsymbol{x} \tag{1.7.53}$$

すなわち，gradient vector は，スカラー量ϕの最大変化方向における変化の割合をいい表すものである．

次に，二階のテンソルの共変微分について考究してみよう．二階のテンソルA_{ij}に二つのベクトル成分u^i及びv^jを乗ずれば，スカラーが得られる．すなわち，

$$\phi=A_{ij}u^iv^j$$

上式をx^kで微分すれば，

$$\begin{aligned}\phi_{,k}&=A_{ij,k}u^iv^j+A_{ij}u^i{}_{,k}v^j+A_{ij}u^iv^j{}_{,k}\\&=A_{ij,k}u^iv^j+A_{ij}u^i|_kv^j+A_{ij}u^iv^j|_k-A_{ij}u^l\Gamma^i_{kl}v^j-A_{ij}u^iv^l\Gamma^j_{kl}\end{aligned}$$

一方，$\phi_{,k}$はまた，次のように書き表すことができる．

$$\phi_{,k}=\phi|_k=(A_{ij}u^iv^j)|_k=A_{ij}|_ku^iv^j+A_{ij}u^i|_kv^j+A_{ij}u^iv^j|_k$$

したがって，　$A_{ij}|_ku^iv^j=A_{ij,k}u^iv^j-A_{ij}u^lv^j\Gamma^i_{kl}-A_{ij}u^iv^l\Gamma^j_{kl}$

上式の dummy indices を差し換えれば，次式が得られる．

$$A_{ij}|_ku^iv^j=(A_{ij,k}-A_{lj}\Gamma^l_{ik}-A_{il}\Gamma^l_{kj})u^iv^j$$

上の関係式は，任意のベクトル成分，u^i及びv^jについて常に成立するから，結局次の関係式が成立する．

$$A_{ij}|_k=A_{ij,k}-A_{lj}\Gamma^l_{ik}-A_{il}\Gamma^l_{kj} \tag{1.7.54 a}$$

上式は$A_{ij}|_k$の定義であると考えてもよい．上式はまた，

$$(A_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j)_{,k}=(A_{ij}g^{ij})_{,k}=A_{ij}|_kg^{ij}=A_{ij}|_k\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$$

一方，
$$\begin{aligned}(A_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j)_{,k}&=A_{ij,k}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j+A_{ij}\boldsymbol{g}^i{}_{,k}\boldsymbol{g}^j+A_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j{}_{,k}\\&=A_{ij,k}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j-A_{ij}\Gamma^i_{kl}\boldsymbol{g}^l\boldsymbol{g}^j-A_{ij}\boldsymbol{g}^i\Gamma^j_{kl}\boldsymbol{g}^l\\&\qquad\text{《∵ (1.7.37)式による》}\\&=A_{ij,k}-A_{lj}\Gamma^l_{ki}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j-A_{il}\Gamma^l_{kj}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\\&=(A_{ij,k}-A_{lj}\Gamma^l_{ik}-A_{il}\Gamma^l_{kj})\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j\end{aligned}$$

としても得られる．(1.7.54 a)式は，$A_{ij}|_k$ を，テンソル A_{ij} の対称性について，別に何の仮定もしないで，定義している．すなわち，$A_{ij}|_k$ の定義は，$A_{ij}\neq A_{ji}$ なる場合にも通用することを，見落してはならない．

なお，$A_{ij}|_k$ は，$v_i|_j$ と同様に共変テンソル(三階)である．また，上と同様にして，次の関係式も誘導される(定義される)．

$$A^i_{\cdot j}|_k=A^i_{\cdot j,k}+A^l_{\cdot j}\Gamma^i_{kl}-A^i_{\cdot l}\Gamma^l_{jk} \tag{1.7.54 b}$$
$$A_i^{\cdot j}|_k=A_i^{\cdot j}{}_{,k}-A_l^{\cdot j}\Gamma^l_{ik}+A_i^{\cdot l}\Gamma^j_{kl} \tag{1.7.54 c}$$
$$A^{ij}|_k=A^{ij}{}_{,k}+A^{lj}\Gamma^i_{kl}+A^{il}\Gamma^j_{kl} \tag{1.7.54 d}$$

上記の諸式は，いずれも，ベクトルの共変微分に対する公式，(1.7.39)式または(1.7.41)式さえ記憶しておけば，常にそれから容易に導き出すことができる．たとえば $A_{ij}|_k$ を例にとると，その右辺は，まずとりあえず，第1項として $A_{ij,k}$ が得られ，次に，テンソル A_{ij} が或るベクトルの i-(共変)成分と，他のベクトルの j-(共変)成分との組合せによって作られているものとの考えの下に，第2項として(1.7.41)式，

$$v_i|_k=v_{i,k}-v_l\Gamma^l_{ik}$$

の右辺の第2項，$-v_l\Gamma^l_{ik}$ の代りに，$-A_{lj}\Gamma^l_{ik}$ が得られ，さらに第3項として，(1.7.41)式，

$$v_j|_k=v_{j,k}-v_l\Gamma^l_{jk}$$

の右辺の第2項 $-v_l\Gamma^l_{jk}$ の代りに $-A_{il}\Gamma^l_{jk}$ が得られる．

(1.7.54)式と同様な関係式はさらに高階のテンソルについても成立する(定義せられる)．すなわち，

$$A_{ijk}|_m=A_{ijk,m}-A_{ljk}\Gamma^l_{im}-A_{ilk}\Gamma^l_{jm}-A_{ijl}\Gamma^l_{km}\qquad\text{etc.}$$

(1.7.54)式の誘導は，単に抽象的な誘導を示したのであるが，次にテンソルの共変微分が具体的に何を表すものであるかについて，それを図解的に説明することを考えてみよう．二階のテンソル A^{ij} を応力テンソル σ^{ij} に見立てて考えてみると，

$$d\boldsymbol{F}=\sigma^{ij}dA_i\boldsymbol{g}_j$$

は，点 x^k における任意の面積素片 $d\boldsymbol{A}=dA_i\boldsymbol{g}^i$ によって，伝達される力を示す．点 x^k の近接点 x^k+dx^k にある他の面積素片によって伝達される力は，$d\boldsymbol{F}$ と，$d\boldsymbol{F}_{,k}dx^k$ だけ相違している．すなわち，伝達される力の dx^k に対する変

化割合は,

$$d\boldsymbol{F}_{,k}=(\sigma^{ij}dA_i)|_k\boldsymbol{g}_j=(\sigma^{ij}|_k dA_i+\sigma^{ij}dA_i|_k)\boldsymbol{g}_j$$

今, 2点 x^k 及び x^k+dx^k において, 大きさ及び(ベクトルとしての)方向の等しい二つの面積素片 $d\boldsymbol{A}$ を選ぶようにすれば, $d\boldsymbol{A}_{,k}=0$ であるから, $dA_i|_k=0$ である. したがってこのような場合には, 力 $d\boldsymbol{F}$ の共変微分は, 単に,

$$d\boldsymbol{F}_{,k}=\sigma^{ij}|_k dA_i\boldsymbol{g}_j$$

となる. この値 $d\boldsymbol{F}_{,k}$ は, 相等しい二つの面積素片の成分 dA_i が, どのような大きさ及び方向であっても, $\sigma^{ij}|_k=0$ ならば, 常に $d\boldsymbol{F}_{,k}=0$ であり, また逆に, 相等しい二つの面積素片の成分 dA_i が, どのような大きさ及び方向であっても, $d\boldsymbol{F}_{,k}=0$ になるのは, $\sigma^{ij}|_k=0$ なる場合に限る. $\sigma^{ij}|_k dA_i$ は, 相等しい面積素片 $d\boldsymbol{A}$ に作用する力 $d\boldsymbol{F}$ の x^k 方向における変化割合の j-(反変)成分を示し, $\sigma^{ij}|_k$ は, 応力テンソル $[\sigma^{ij}]$ の x^k 方向における変化割合の ij-(反変)成分を示す. 応力テンソルの共変微分の任意の成分 $\sigma^{ij}|_k$ が, i, j のすべてについて全部0であることは, 物理的な応力量が, テンソルとして k 方向の近接2点で変化しないことを意味するものである. ただし, $\sigma^{ij}|_k$は個々の応力成分 σ^{ij} だけの x^k による微分 $\sigma^{ij}{}_{,k}$ を意味しないから, $\sigma^{ij}|_k=0$ なることは, 個々の応力成分 σ^{ij} が, それぞれ, x^k の変化に対して無変化なことを意味するものではない. このことは, ベクトルの x^k 方向についての微分が0であっても, そのベクトルの個々の成分が, x^k 方向について, 無変化であるとは限らないのと同様である. このような叙述は, 他のすべてのテンソルについてもいいうることでその一例は, 弾性率テンソル E^{ijlm} である. もし, i, j, k, l, m のそれぞれが(1, 2, 3)のいずれの値をとっても, 常に $E^{ijlm}|_k=0$ であるならば, このことは, この材料が均質であって, どの方向の近接2点をとっても, 同じ弾性的性質を有することを意味している. ただし, 一般に異方性は依然として存在するが, その異方性は, どの方向の近接2点でも同じであることを意味している.

共変微分についての上記の事柄を metric tensor 及び交代テンソルに適用すれば, 次の二つの重要な結論に達する. すなわち, デカルト座標系では, $g_{ij}=\delta_{ij}$ 及び $\epsilon_{ijk}=e_{ijk}$ であって, これらの値は, 座標成分の変化に対してconstant である. したがってデカルト座標系では, i, j, k, l が(1, 2, 3)のいずれの値であっても, 常に,

$$g_{ij,k}=0 \quad 及び \quad e_{ijk,l}=0$$

しかるに, デカルト座標系では, 通常の偏微分と共変微分とは同じであるから, 上式は, 次のように書くことができる.

$$g_{ij}|_k=0 \quad 及び \quad \epsilon_{ijk}|_l=0 \qquad (1.7.55\ \mathrm{a, b})$$

上の二式は，それぞれ三階及び四階のテンソルのすべての成分が0であることを示すテンソル式である．したがって，これらの式はまた，他のすべての座標系にも通用し，テンソル $[g_{ij}]$ 及び $[\epsilon_{ijk}]$ は場の中で常に一定であることがわかる．ただし，このことは，個々のテンソル成分 g_{ij} 及び ϵ_{ijk} のそれぞれが，デカルト座標系以外でも，常に一定であることを意味するものではない．

上述のことと同様なことが，g^{ij} 及び ϵ^{ijk} についても成立する．したがって，metric tensor または交代テンソルが，被微分関数中の一つの因数となっている場合には，この因数は，常に共変微分演算記号の外に，そのまま引出してもよいことになる．たとえば，

$$(v^i g_{ij})|_k = v^i|_k g_{ij} + v^i(g_{ij}|_k)$$

において，常に $g_{ij}|_k=0$ であるから，

$$(v^i g_{ij})|_k = v^i|_k \cdot g_{ij}$$

とすることができる．

また，
$$\begin{aligned}\epsilon_{123}|_l &= \epsilon_{123,l} - \epsilon_{n23}\Gamma^n_{1l} - \epsilon_{1n3}\Gamma^n_{2l} - \epsilon_{12n}\Gamma^n_{3l}\\ &= \epsilon_{123,l} - \epsilon_{123}\Gamma^1_{1l} - \epsilon_{123}\Gamma^2_{2l} - \epsilon_{123}\Gamma^3_{3l}\\ &= \epsilon_{123,l} - \epsilon_{123}\Gamma^m_{ml}\end{aligned}$$

(1.7.55 b)式によって，$\epsilon_{123}|_l=0$ (ただし $\epsilon_{123,l}\neq 0$) であるから，上式=0

$$\therefore \quad \epsilon_{123,l} = \epsilon_{123}\Gamma^m_{ml} \tag{1.7.56}$$

$v_i|_j$ は二階の共変テンソルであるから，これに(1.7.54 a)式を適用して，さらに $v_i|_j$ の x^k に関する共変微分を作ることができる．すなわち，

$$v_i|_j = v_{i,j} - v_m\Gamma^m_{ij} = A_{ij}$$

したがって，
$$\begin{aligned}v_i|_j|_k = v_i|_{jk} &= A_{ij}|_k\\ &= \underline{(v_{i,j} - v_m\Gamma^m_{ij})_{,k} - (v_{l,j} - v_m\Gamma^m_{lj})\Gamma^l_{ik}} - (v_{i,l} - v_m\Gamma^m_{il})\Gamma^l_{jk}\end{aligned} \tag{1.7.57}$$

読者はここで，**ベクトルの共変微分**と，**テンソルの共変微分**との相違を明確に理解しておくことが必要である．上式(1.7.57)の右辺の第1項及び第2項(アンダーラインの部分)は，ベクトル$(\boldsymbol{v}_{,j}=v_i|_j\boldsymbol{g}^i)$の共変微分，$(\boldsymbol{v}_{,jk}=(v_i|_j\boldsymbol{g}^i)_{,k})$ の $\boldsymbol{g}^i$ に対する成分である．一方，(1.7.57)式全体は，テンソル$[v_i|_m]$ の共変微分の ij-成分を意味している．すなわち，**ベクトルの共変微分と，テンソルの共変微分とでは，(1.7.57)式右辺の第3項だけの相違がある．**すなわち，

$$\begin{aligned}v_i|_{jk}\boldsymbol{g}^i &= [\{(v_i|_j)_{,k} - v_l|_j\Gamma^l_{ik}\} - v_i|_l\Gamma^l_{jk}]\boldsymbol{g}^i\\ &= \boldsymbol{v}_{,jk} - v_i|_l\Gamma^l_{jk}\boldsymbol{g}^i\end{aligned}$$

同様に，
$$\begin{aligned}v^i|_{jk}\boldsymbol{g}_i &= [\{(v^i|_j)_{,k} + v^l|_j\Gamma^i_{lk}\} - v^i|_l\Gamma^l_{jk}]\boldsymbol{g}_i\\ &= \boldsymbol{v}_{,jk} - v^i|_l\Gamma^l_{jk}\boldsymbol{g}_i\end{aligned}$$

さて，(1.7.57)式における2回の共変微分は，その微分順序を交換してもよ

いかどうかを考えてみよう．ただし，上に述べたように，この問題は，テンソル$[v_i|_m]$ の x^k による共変微分の ij-成分と，同じテンソル$[v_i|_m]$ の x^j による共変微分の ik-成分とが相等しいか否かという問題であって，ベクトルの共変微分($\boldsymbol{v}_{,jk}=(v_i|_j\boldsymbol{g}^i)_{,k}$)と，ベクトルのもう一つの共変微分($\boldsymbol{v}_{,kj}=(v_i|_k\boldsymbol{g}^i)_{,j}$)とが相等しいか否かという問題とは異なるが，結果的には同じになることに注意しなければならぬ．

(1.7.57)式で2回の共変微分の順序を変更したもの，すなわち $v_i|_{kj}$ の値は，(1.7.57)式の下付添字 j 及び k を単に交換すれば得られる．すなわち，

$$v_i|_{kj}=(v_{i,k}-v_m\Gamma^m_{ik})_{,j}-(v_{l,k}-v_m\Gamma^m_{lk})\Gamma^l_{ij}-(v_{i,l}-v_m\Gamma^m_{il})\Gamma^l_{jk}$$

上式と(1.7.57)式とを比較すると，右辺の最後の項は相等しいから，両式の差をとると，最後の項は相殺されて次式が得られる．

$$\begin{aligned}v_i|_{jk}-v_i|_{kj}&=v_{i,jk}-v_{i,kj}-v_{m,k}\Gamma^m_{ij}+v_{m,j}\Gamma^m_{ik}-v_m\Gamma^m_{ij,k}\\&\quad+v_m\Gamma^m_{ik,j}-v_{l,j}\Gamma^l_{ik}+v_{l,k}\Gamma^l_{ij}+v_m\Gamma^m_{lj}\Gamma^l_{ik}-v_m\Gamma^m_{lk}\Gamma^l_{ij}\\&=v_m(\Gamma^m_{ik,j}-\Gamma^m_{ij,k}+\Gamma^m_{lj}\Gamma^l_{ik}-\Gamma^m_{lk}\Gamma^l_{ij})\equiv v_mR^m_{\cdot ijk}\end{aligned}\quad(1.7.58)$$

上式の左辺は，三階の共変テンソルであるから，同じことが最後の項，

$$v_mR^m_{\cdot ijk}$$

についても成立しなければならない．したがって，$R^m_{\cdot ijk}$ は四階のテンソルでなければならない．この $R^m_{\cdot ijk}$ は，Riemann-Christoffel tensor として知られている．さて，二つの共変微分の順序を交換してもよいかどうか，という質問は，テンソル$R^m_{\cdot ijk}=0$ であるかどうかという問いと，等価である．$R^m_{\cdot ijk}=0$ なる式は，テンソル式であるから，この式はすべての座標系で成立するか，または全然成立しないかのいずれかである．そしてテンソルが0であるということは，テンソルの個々の成分がすべて0であるということと同義である．しかるに，デカルト座標系では，任意の Γ^k_{ij} は0であるから，個々の $R^m_{\cdot ijk}$ は，m,i,j,k の値のいかんにかかわらず，すべて0である．したがって，一般の三次元座標系においても，

$$R^m_{\cdot ijk}=0\qquad(m,i,j,k=1,2,3)\qquad(1.7.59)$$

である．ゆえに，三次元空間では，共変微分の順序はこれを変更しても，常に差支えないことが証明された．

しかしながら，上述の事柄については，重要な制限のあることを忘れてはならない．shell の理論では，曲面上の点，すなわち三次元空間中で，特定の二次元部分空間(subspace)について成立する式を取扱わなければならないので，上の論法は成立しない．二次元曲面上において，共変微分の順序を交換してもよいかどうかということは，一に二次元の Riemann-Christoffel tensor, $R^\mu_{\cdot\alpha\beta\gamma}$ $(\mu,\alpha,\beta,\gamma=1,2)$ が0であるか否か，ということにかかっているが，この二次

元テンソル $R^{\mu}_{\cdot\alpha\beta\gamma}$ は，$R^{m}_{\cdot ijk}$ $(m, i, j, k=1, 2, 3)$ の定義(1.7.58)式から，一つまたはそれ以上の indices の値が 3 であるような，すべての項を省くことによって得られる．曲面上で index の値が 3 の方向は，三次元的に考えると，曲った方向であって，二次元曲面に沿った曲線座標系では，第 3 の基底ベクトルの方向は，二次元曲面に沿った方向で，常に変化している．したがって，index が 3 であるような Γ の項を省いて得られる二次元曲面上の Riemann-Christoffel tensor は，三次元的に考えられた Riemann-Christoffel tensor とは異なるものであることがわかる．《index 3 の方向が，もし，三次元的に一定方向で，index＝1, 2 の方向が，常に index＝3 の方向に垂直ならば(すなわち，index＝3 の方向が末広がり，または末つぼみになっていないならば)，index に一つでも 3 をもつような Γ_{ijk} または Γ^{k}_{ij} は常に 0 に等しい．しかし，index＝3 の方向で，末広がりまたは末つぼみになっているときは，index の一つが 3 であっても，Γ_{ijk} または Γ^{k}_{ij} は，0 に等しくない．》したがって，$R^{\mu}_{\cdot\alpha\beta\gamma}(\mu, \alpha, \beta, \gamma=1, 2)$ の値が，実際に 0 とならないことが，ありうるわけである．このように，二次元曲面上に限定した場合には，二つの共変微分のいずれを先にするかということが，問題になる．以上の事柄については，後述の第 1.12.2 節で再び考察することにする．

第1.8章　微分演算子，速度，並びにベクトルの積分

1.8.1　スカラーの勾配

三次元空間の或る点に対応する関数として，スカラー $\phi(x^1, x^2, x^3)$ が分布されている場合に，これをスカラー場 (scalar field) とよび，この ϕ が一定値をとるような点の軌跡を，等位面 (equipotential surface) とよぶ．等温面，等圧面，等電位面，等ポテンシャル・エネルギー面 などは，いずれもその例である．

さて，一つのスカラー場，$\phi(x^1, x^2, x^3)$ があるとき，前章 (1.7.52) 式で述べたように，

$$\phi|_i \boldsymbol{g}^i = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}\boldsymbol{g}^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\boldsymbol{g}^2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3}\boldsymbol{g}^3 \tag{1.8.1}$$

をスカラー $\phi(x^1, x^2, x^3)$ の勾配ベクトル (gradient vector) とよび，これを，grad ϕ なる記号で表すが，これはまた，形式的にベクトル的微分演算子 $\nabla = (\quad)|_i \boldsymbol{g}^i$, or $(\quad)|^i \boldsymbol{g}_i$ と，スカラー ϕ との dot product と見なすことができる．この場合，上のベクトル演算子 ∇ を，Hamilton の演算子(Hamiltonian)または nabla とよぶ．nabla という名称は Hamilton が導入した文字 ∇ の形が，アッシリヤの竪琴に似ているところから，その名をとって nabla とよばれるようになったものである．

今，f, g をそれぞれ空間の位置で定まるスカラー関数とするとき，ベクトル的微分演算子 ∇ が，次の性質をもつことは容易に検証される．

$$\left.\begin{aligned} &\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g \\ &\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g) \\ &\nabla\{f(\phi)\} = \frac{\partial f}{\partial\phi}\cdot\nabla\phi \end{aligned}\right\} \tag{1.8.2}$$

ただし，上の最後の式では，ϕ は点(x^1, x^2, x^3)のスカラー関数で，f は ϕ の関数であるとする．

また，∇ の定義から，

$$\nabla x^1 = \boldsymbol{g}^1, \qquad \nabla x^2 = \boldsymbol{g}^2, \qquad \nabla x^3 = \boldsymbol{g}^3 \tag{1.8.3}$$

である．また，スカラー関数 ϕ の全微分は，

$$d\phi = \phi|_i dx^i = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3}dx^3 \tag{1.8.4 a}$$

と書けるが，上式の右辺は，問題の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$ で表すとき(以下，

本章では，位置ベクトルを表すのに $\boldsymbol{R}$ の文字を用い，また同方向の単位ベクトルを表すのに $\boldsymbol{r}$ の文字を用いて，相互の区別をすることにする)，$d\boldsymbol{R}$ と，ベクトル $\nabla\phi$ との dot product である．すなわち，

$$d\phi=(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{R} \tag{1.8.4 b}$$

次に，デカルト座標系で，スカラー R(R は，位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ の絶対値とする)は，

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

である．このスカラー R について $\nabla\cdot R$ を計算すれば，

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x}{R},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{y}{R},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z}{R}$$

であるから，これから $\nabla\cdot R=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot R$ は，

$$\nabla\cdot R=\frac{x}{R}\boldsymbol{i}+\frac{y}{R}\boldsymbol{j}+\frac{z}{R}\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{r} \tag{1.8.5}$$

ただし，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$：デカルト座標系の基底ベクトル，

$\boldsymbol{r}$：位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ の方向の単位ベクトル

であることがわかる．したがって，さらに一般的に，R の関数 $\phi(R)$ に対しては，

$$\nabla\cdot\phi(R)=\frac{\partial\phi}{\partial R}\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\frac{\partial\phi}{\partial R}\boldsymbol{r} \tag{1.8.6}$$

なる関係式が成立する．特に $\phi(R)=1/R$ なる場合には，

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^2}\boldsymbol{r}=-\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{1.8.7}$$

を得る．

以上のように，ベクトル微分演算子 ∇ を用いれば，デカルト座標系で成立する事柄を総合的に考察して，容易に一般の座標系で通用するテンソル式に直しうる利点がある．ただし，最終的に得られた式に，位置ベクトル $\boldsymbol{R}$ を含むときは，曲線座標系ではこれを成分表示(indicial notation を用いた表示)することはできない．

さらに，空間の各点で，それぞれベクトルが定義されておれば，それをベクトル場(vector field)という．ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ では，その成分，A^1, A^2, A^3 は，それぞれ(x^1, x^2, x^3)の関数である．もし，一つのベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{A}=-\nabla\phi$$

を成立せしめるような，スカラー場 ϕ が存在するならば，$\boldsymbol{A}$ はポテンシャルをもっているといい，ϕ を $\boldsymbol{A}$ のスカラー・ポテンシャルまたは単に $\boldsymbol{A}$ のポテンシャルという．たとえば，一点（この点を座標原点にとる）に電荷 e があると

き，他の一点P（位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$ とする）にある単位電荷に作用する力 $\boldsymbol{E}$ は，

$$\boldsymbol{E}=\frac{e}{R^2}\boldsymbol{r}=\frac{e}{R^3}\boldsymbol{R}$$

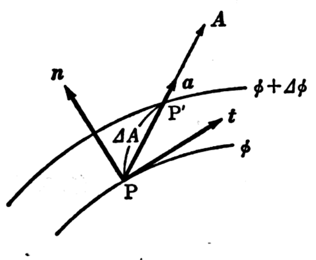
で与えられる．ところが，(1.8.7)式によれば $\boldsymbol{R}/R^3=-\nabla(1/R)$ であるから，

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\left(\frac{e}{R}\right)$$

である．したがって，$\varphi=e/R$ とおけば，

$$\boldsymbol{E}=-\nabla(\varphi)$$

を得る．ここに $\varphi=e/R$ は電位，$\boldsymbol{E}$ は電場とよばれるが，$\boldsymbol{E}$ はポテンシャル φ をもっていることがわかる．



第58図　方向微係数

今，一つのスカラー場 ϕ と，空間内の一点Pを通るベクトル $\boldsymbol{A}$ とが与えられているとする．ベクトル $\boldsymbol{A}$ 上に，他の一点 P′ をとり，$\overrightarrow{\mathrm{PP'}}=(\Delta A)\boldsymbol{a}$ とおく．ただし，$\boldsymbol{a}$ はベクトル $\boldsymbol{A}$ の方向の単位ベクトルとする．Pにおける ϕ の値を ϕ，P′ における ϕ の値を，$\phi+\Delta\phi$ とおくとき，

$$\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta A}=\frac{\partial\phi}{\partial A}$$

なる値をスカラー ϕ のベクトル $\boldsymbol{A}$ の方向での方向微係数(direction derivative)という．いま，空間にデカルト座標系を設定し，$\boldsymbol{a}$ の成分を a_x, a_y, a_z とおけば，

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta A}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta A}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta A}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta A}$$

であって，$\dfrac{\Delta x}{\Delta A}\to a_x$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta A}\to a_y$，$\dfrac{\Delta z}{\Delta A}\to a_z$ であるから，

$$\frac{\partial\phi}{\partial A}=a_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+a_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+a_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

を得る．この式は，また，

$$\frac{\partial\phi}{\partial A}=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$

とも書かれるから，この右辺を，単位ベクトル $\boldsymbol{a}$ とベクトル演算子 ∇ とのdot product

$$\boldsymbol{a}\cdot\nabla=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

を ϕ に施したもの，と考えれば，

$$\frac{\partial\phi}{\partial A}=\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\phi)=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\phi=\phi|_t a^t \qquad (1.8.8)$$

と書くことができる．ここに$(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)$は，スカラー演算子である．一般に，

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla=A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}$$

と定義して，

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi=A_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+A_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+A_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

を考えれば，$\boldsymbol{A}=A\boldsymbol{a}$ であるから，

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi=\phi|_iA^i=A\boldsymbol{a}\cdot\nabla\phi=A\frac{\partial\phi}{\partial A} \tag{1.8.9}$$

以上に述べたところからわかるように，方向微係数 $\partial\phi/\partial A=\boldsymbol{a}\cdot\nabla\phi=\phi|_ia^i$ は，ベクトル$\boldsymbol{A}$の方向での，スカラーϕの増加率（単位ベクトル$\boldsymbol{a}$についてのϕの増加量）である．今，$\boldsymbol{t}$を，或る単位ベクトルとするとき，もしも，

$$\boldsymbol{t}\cdot\nabla\phi=\phi|_it^i=0$$

ならば，ベクトル$\boldsymbol{t}$と，ベクトル$\nabla\phi$とは直交するはずであるが，上述のことからこのベクトル$\boldsymbol{t}$の方向では，スカラーϕの増加率は0であることになる．すなわち，ベクトル$\nabla\phi$に直交する方向では（$\boldsymbol{t}$の方向では）スカラーϕの増加率は0であることがわかる．しかるに，スカラーϕの増加率が0である方向は，等位面（曲面）$\phi=c$の接平面上にある．ゆえに，次のようにいうことができる．“ベクトル$\nabla\phi$に直交する方向は，等位面$\phi=c$の接平面上にある．換言すれば，ベクトル$\nabla\phi$は，等位面$\phi=c$に垂直な方向（等位面$\phi=c$の法線方向）のベクトルである”．

したがって，今，ベクトル$\nabla\phi$方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{n}$とすれば，$\boldsymbol{n}$は等位面，$\phi=c$の法線方向の単位ベクトルで，かつ上述のことから，$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi$は，ベクトル$\boldsymbol{n}$の方向での$\phi$の増加率の大きさを示すものである．そして等位面$\phi=c$の法線方向では，$\phi$の増加率は，明らかに，すべての方向の増加率のうち最大値をとるから，“$\nabla\phi$はϕの最大増加率または最速増加率の方向及び大きさを示すベクトルである”ということができ，かつ“その方向は等位面$\phi=c$の法線方向である”ということができる．因みに，等位面$\phi=c$の接平面の方程式は，

$$\boldsymbol{T}\cdot\nabla\phi=\phi|_iT^i=0$$

$$\text{i.e.,}\quad \frac{\partial\phi}{\partial x^1}X^1+\frac{\partial\phi}{\partial x^2}X^2+\frac{\partial\phi}{\partial x^3}X^3=0 \tag{1.8.10}$$

ただし，(x^1,x^2,x^3)は，等位面$\phi(x^1,x^2,x^3)=c$上の点，

(X^1,X^2,X^3)は，ベクトル$\boldsymbol{T}$上の任意の点とする

であり，また，等位面$\phi(x^1,x^2,x^3)=c$上の点(x^1,x^2,x^3)における法線の方程式は，

$$\nabla\phi=\alpha\boldsymbol{N}$$

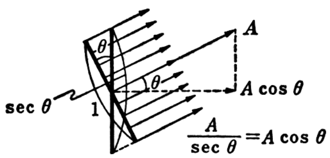
$$\text{i.e.,}\quad \frac{X^1}{\dfrac{\partial\phi}{\partial x^1}}=\frac{X^2}{\dfrac{\partial\phi}{\partial x^2}}=\frac{X^3}{\dfrac{\partial\phi}{\partial x^3}} \tag{1.8.11}$$

ただし，(X^1, X^2, X^3)は，法線ベクトル $\boldsymbol{N}$ 上の任意の点とする．

1.8.2　発散 $(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$

一般のベクトルを $\boldsymbol{A}$ で表し，微分演算子 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=(\ )|_i\boldsymbol{g}^i$ と，ベクトル $\boldsymbol{A}=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})=A^i\boldsymbol{g}_i$ との dot product,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=A^i|_i=A_i|^i \tag{1.8.12}$$



第59図　単位面積を通過する流線の数

を考えた場合，この $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=A^i|_i$ を div $\boldsymbol{A}$ で表し，これをベクトル $\boldsymbol{A}$ の発散と唱える．

今，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を想定するとき，或る曲線の接線がいつもベクトル $\boldsymbol{A}$ の方向へ向かう曲線，すなわち，

$$\frac{dx^1}{A^1}=\frac{dx^2}{A^2}=\frac{dx^3}{A^3} \tag{1.8.13}$$

を満足する曲線を，ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の流線 (stream line) という．流線はベクトル $\boldsymbol{A}$ の方向を示しているが，その強さを示すのに，ベクトル $\boldsymbol{A}$ に垂直な単位平面を通って $\boldsymbol{A}$ の大きさ（絶対値）に等しい数の流線を引いて，これを示すことにする．今，ベクトル $\boldsymbol{A}$ として，流体の粒子変位または粒子速度を想定し，デカルト座標系について考えれば，微小な x–方向の平面 $(dydz)$ を通過する流体の体積は $A_x dydz$ であるから，x–方向の単位面積を通過する流体の体積は，$\boldsymbol{A}$ の x–成分 A_x に等しく，これはまた，x–方向の単位面積を通過する流線の数に等しい(一般に，任意の単位平面を通る流線の数は，ベクトル $\boldsymbol{A}$ のこの平面の法線上への正射影の大きさに等しい)．したがって，x–方向の単位距離だけ隔たった二つの単位面積を通じて，単位体積から流出する流体の体積は，$\partial A_x/\partial x$ であって，これは空間に固定した単位体積から，x–方向の二つの単位面積を通って，外へ出る流線の数に等しい．すなわち，結局，空間に固定した単位体積から，外へ流出する流体の体積は全部で

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=A^i|_i \quad (1.8.12)\ (再出)$$

であって，これは，空間に固定した単位体積から，外へ出る流線の全数に等

しい．上記の(1.8.12)式は，spatial coordinate による流出率であるが，見方を変えて，弾性体で $\boldsymbol{A}$ の代りに Eulerian 変位《spatial coordinate における空間の一定点(x, y, z)に至る変位》$\boldsymbol{u}$ を用いれば，Eulerian の体積歪を表すものとみることもできる．これに対して，粒子変位《Lagrangian 変位》を $\boldsymbol{u}$ として，material coordinate による発散，すなわち，

$$\frac{\partial u_x}{\partial a}+\frac{\partial u_y}{\partial b}+\frac{\partial u_z}{\partial c}=u^i\Big|_{a^i} \tag{1.8.14}$$

(ただし，u_x, u_y, u_z はそれぞれ粒子変位の x, y, z 方向成分とする)

をとれば，(1.8.14)式は，Lagrangian の体積歪を表すことになる．

さて，一点Oに電荷 e があるときの電場を例にとって考えてみよう．点O以外の点Pにある単位正電荷に作用する力 $\boldsymbol{E}$ は，$\boldsymbol{E}=(e/R^3)\boldsymbol{R}$ で与えられるが，これに対してデカルト座標系では，

$$E_x=e\frac{x}{R^3},\qquad E_y=e\frac{y}{R^3},\qquad E_z=e\frac{z}{R^3}$$

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

であるから，

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=e\left(\frac{1}{R^3}-\frac{3x^2}{R^5}\right),\qquad \frac{\partial E_y}{\partial y}=e\left(\frac{1}{R^3}-\frac{3y^2}{R^5}\right),\qquad \frac{\partial E_z}{\partial z}=e\left(\frac{1}{R^3}-\frac{3z^2}{R^5}\right)$$

したがって，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=e\left(\frac{3}{R^3}-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{R^5}\right)=0$$

すなわち，この場合，単位体積から外へ出る流線の数は，＋－して結局0であることがわかる．

次に一つのスカラー場ϕから，その勾配 $\nabla\phi$ を作り，この勾配 $\nabla\phi$ の発散 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\phi)=\nabla\cdot(\nabla\phi)=\nabla\cdot\nabla\cdot\phi=\nabla^2\phi$ を作れば，

$$\nabla\cdot\nabla\cdot\phi=\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\phi|_i|^i=\phi|_i^i$$

で与えられるスカラーを得る．ここに現れた演算子 $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ $=(\quad)|_i^i$ を Laplace の演算子(Laplace operator または Laplacian)とよぶ．

偏微分方程式 $\nabla^2\phi=0$ は，Laplace の方程式とよばれ，それを満足する関数は，調和関数 (Harmonic function) とよばれる．たとえば，$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ に対しては，

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^3}+\frac{3x^2}{R^5},\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^3}+\frac{3y^2}{R^5},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^3}+\frac{3z^2}{R^5}$$

であるから，

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=0$$

である．あるいは，前にあげたようにベクトル $\boldsymbol{E}$ は，

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\left(\frac{e}{R}\right)$$

というポテンシャルをもっていたから，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\boldsymbol{E}=-\nabla\cdot\nabla\left(\frac{e}{R}\right)=-e\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=0$$

であることは，上述のことからもわかる．また，複素関数論で，正則関数 $u+iv$ では，u 及び v も，それぞれ一つの調和関数の特例(二次元デカルト座標系)である．

さて，ϕを一つのスカラー関数とし，$\boldsymbol{A}$ を一つのベクトル関数として，$\operatorname{div}(\phi\boldsymbol{A})$を計算すれば，

$$\operatorname{div}(\phi\boldsymbol{A})=\frac{\partial(\phi A_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\phi A_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\phi A_z)}{\partial z}$$

$$=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}A_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}A_z\right)+\phi\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

したがって，

$$\nabla(\phi\boldsymbol{A})=\operatorname{div}(\phi\boldsymbol{A})=(\phi A^i)|_i$$

$$=(\operatorname{grad}\phi)\cdot\boldsymbol{A}+\phi\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{A}$$

$$=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi+\phi\cdot\nabla\boldsymbol{A} \qquad (1.8.15\ \text{a})$$

$$=\phi|_iA^i+A^i|_i\phi \qquad (1.8.15\ \text{b})$$

(ただし，上式で ∇ による微分演算は，∇ に先行する文字については作用せず，もっぱら，∇ より後にある文字に対してのみ作用するものとする)

なる ∇ に関する公式を得る．しかし，(1.8.15 b)式に示されているように，この場合には，微分演算子 ∇ を用いるよりも，indicial notation を用いた方が，はるかに容易である．

1.8.3　回転 $(\nabla\times\boldsymbol{A})=\text{curl}\,\boldsymbol{A}$ または $\text{rot}\,\boldsymbol{A}$

微分演算子 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=(\quad)|_i\boldsymbol{g}^i=(\quad)|^i\boldsymbol{g}_i$ と，ベクトル $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}=A^i\boldsymbol{g}_i$ との cross product,

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

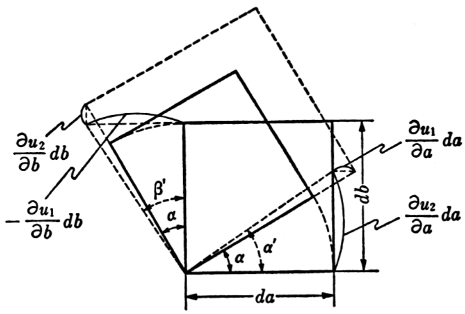
$$=A^j|^i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k=A_j|_i\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k$$

$$=\sqrt{g}\begin{vmatrix}\boldsymbol{g}^1 & \boldsymbol{g}^2 & \boldsymbol{g}^3\\ |^1 & |^2 & |^3\\ A^1 & A^2 & A^3\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\boldsymbol{g}_1 & \boldsymbol{g}_2 & \boldsymbol{g}_3\\ |_1 & |_2 & |_3\\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}$$

を，ベクトル$\boldsymbol{A}$の回転とよび，curl $\boldsymbol{A}$ または rot $\boldsymbol{A}$ の記号で示す．

さて，弾性体で，歪と，剛体回転とが共存する場合に，粒子変位ベクトルを$\boldsymbol{u}$で表すとき，rot $\boldsymbol{u}$と，剛体回転との関係について考えてみよう．

簡単のために，平面デカルト座標系（$x\ y$）内で，面積素片



第60図　垂直歪と剛体回転とが共存する場合のrot $\boldsymbol{u}$

(da, db)が z 軸の周りに剛体回転(回転角α)と，単に垂直歪だけを起した場合について考えてみると(第60図参照)，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=\left(\frac{\partial u_2}{\partial a}-\frac{\partial u_1}{\partial b}\right)\boldsymbol{k}=(\tan\alpha'+\tan\beta')\boldsymbol{k}$$
$$\fallingdotseq 2\tan\alpha\cdot\boldsymbol{k}\fallingdotseq 2\alpha\cdot\boldsymbol{k}$$

すなわち，(rot $\boldsymbol{u}$)の値は，$2\alpha\boldsymbol{k}$ の値に完全に等しいわけではない．しかし剪断歪がない場合には，第60図からわかるように，$(\partial u_1/\partial a)da$ 及び $(\partial u_2/\partial b)db$ による角度変化はαに比べて高次の微小量である．垂直歪の外に剪断歪$(\partial u_2/\partial a+\partial u_1/\partial b)$がある場合には，この剪断歪は外見上，上記の(rot $\boldsymbol{u}$)と，その大きさが同程度であるように見える．しかし，弾性体が変形によって，その内部の点(a, b)で生ずる剛体回転角(有限距離はなれた他の点に対する相対的剛体回転角)は，有限距離だけ離れた2点の間に介在する弾性体の種々の歪の積分によって生ずるものであるから，一般に，その点における剪断歪$(\partial u_2/\partial a+\partial u_1/\partial b)$に比べて，格段に大きいと考えられ，したがって，rot $\boldsymbol{u}$ は，式の外見上では剪断歪量と同程度の大きさのようにみえるが，実は剪断歪量は，rot $\boldsymbol{u}$ に比べて，一般に高次の微小量である(ただし，無限小ではない)．すなわち，rot $\boldsymbol{u}$と剛体回転ベクトル(rigid body rotation vector)との相違量《歪に基づく》は，rot $\boldsymbol{u}$の大きさに比べて，高次の微小量であると考えてよい．換言すれば，rot $\boldsymbol{u}$ と剛体回転とはほとんど相等しく，その相違量は，たかだか，ほぼ歪量の程度にすぎない．もっとも，点(a, b)が，不動点と考えている他の点に対してきわめて近接しているとか，またはその他の理由で，rot $\boldsymbol{u}$ の大きさが，歪量と同程度の大きさとなる場合も当然ありうるわけであるが，このような場

合には，剛体回転は 0 とみなされなければならない．すなわち，rot $\boldsymbol{u}$ を剛体回転ベクトルとして考える場合には，われわれは常に，歪量に比べて，はるかに大きな剛体回転角を近似的に問題にしているのであって，歪程度に小さな剛体回転角と完全に等しい微小剛体回転角を問題にしているのではないことを忘れてはならない．

なお上述の場合は，Lagrangian での rot $\boldsymbol{u}$ について述べたのであるが，もし，(a,b) の代りに (x,y) を用い，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ として，Eulerian 変位《spatial coordinate における空間の一定点 (x,y,z) に至る変位》を用いれば，Eulerian での rot $\boldsymbol{u}$ が得られる．

二つのベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ に対して常に次式が成立する．

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})&=\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=(A^j+B^j)|^i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k\\&=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}=A^j|^i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k+B^j|^i\epsilon_{ijk}\boldsymbol{g}^k\end{aligned}\tag{1.8.16}$$

また，ϕ を一つのスカラー，$\boldsymbol{A}$ を一つのベクトルとするとき，常に次式が成立する．

$$\begin{aligned}\nabla\times(\phi\boldsymbol{A})&=\mathrm{rot}(\phi\boldsymbol{A})=(\phi A_j)|_i\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k\\&=\phi|_i\cdot A_j\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k+A_j|_i\epsilon^{ijk}\cdot\phi\boldsymbol{g}_k\\&=(\nabla\phi)\times\boldsymbol{A}+\phi(\nabla\times\boldsymbol{A})\end{aligned}\tag{1.8.17}$$

(1.8.16)式及び(1.8.17)式の双方とも ∇ なる微分演算子を用いるよりも，indicial notation による方がはるかに便利，かつ容易である．

1.8.4　微分演算子 ∇ と他のベクトル $\boldsymbol{A}$ との Dyadic product

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について，微分演算子 $\nabla=\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=(\quad)|_j\boldsymbol{g}^j$ と，ベクトル $\boldsymbol{A}$ とから，$A^i|_j$ なる要素を作り，これを成分とするテンソル

$$\begin{bmatrix}A^1|_1 & A^1|_2 & A^1|_3\\ A^2|_1 & A^2|_2 & A^2|_3\\ A^3|_1 & A^3|_2 & A^3|_3\end{bmatrix}\tag{1.8.18}$$

を考えるとき，このテンソル$[A^i|_j]$を，ベクトル微分演算子∇とベクトル$\boldsymbol{A}$とのdyadic productといい，またこのテンソル$[A^i|_j]$を，ベクトル$\boldsymbol{A}$のgradient tensor ともいう．

上の説明では，ベクトル $\boldsymbol{A}$ を単なる固着ベクトルとして説明したが，一般座標系で，もし，ベクトル $\boldsymbol{A}$ が弾性体の粒子変位ベクトル$\boldsymbol{u}$である場合には，このベクトル $\boldsymbol{u}$ を spatial coordinate (x^i) に固着した変位，すなわち Eulerian 変位として取扱い，(1.8.18) 式において，spatial coordinate (x^i) による共変微分をとるか，あるいは同じベクトル $\boldsymbol{u}$ を，material coordinate (a^i) に固着

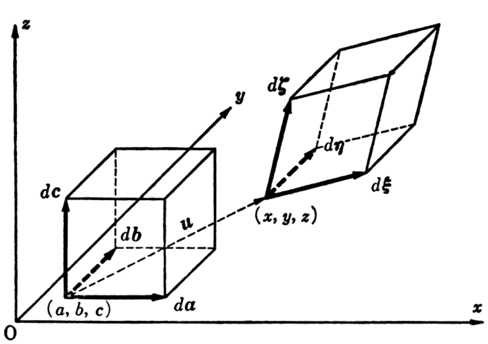
した変位，すなわち Lagrangian の変位として取扱い，(1.8.18) 式において，material coordinate (a^i) による共変微分をとるかが問題になる．というのは，一般座標系では，デカルト座標系と異なり，基底ベクトルが場所によって変るからである．しかし弾性体の微小変形論では，両者の区別をしないのが普通で，また大変形論の場合には，material coordinate の共変微分をとる後者を用いるのが普通である．

また，ベクトル $\boldsymbol{A}$ として流体の速度ベクトルを想定するときには，速度ベクトルとして，spatial coordinate の一定点 (x^1, x^2, x^3) を次々に通過する流体の流速 $\bar{\boldsymbol{v}}$ (後述)を考えて，spatial coordinate (x^i) による共変微分をとるか，あるいは，一定の分子点 (a^1, a^2, a^3) が有する粒子速度 $\boldsymbol{v}$ を考えて，material coordinate (a^i) による共変微分をとるかが問題になる．流体の場合には，通常前者を用いるが，場合によっては，後者についても考察が行われる．

第 1.3.3 節で，デカルト座標系の場合における displacement gradient tensor について，Lagrangian description と Eulerian description との関係について述べた．一般座標系における $[u^i|_j]$ を，座標系変換係数 $\beta^{i'}_{i}\beta^{j}_{j'}$ を乗じて，単にデカルト座標系に変換することは，容易である《ただし，この場合の座標系変換係数は，Lagrangian description では，点 (a^1, a^2, a^3) における座標系変換係数でなければならず，また Eulerian description では，点 (x^1, x^2, x^3) における座標系変換係数でなければならない》．しかし一般座標系では，デカルト座標系の場合のように，$u^i=x^i-a^i$ というような，一般的な関係はなく，また (x^i-a^i) は一般座標系では，単に座標成分の差にすぎず，x^i, a^i 双方とも，ベクトル成分ではないので，Lagrangian description と Eulerian description の相互関係について，第 1.3.3 節のように簡単な取扱いはできない．

しかしながら，デカルト座標系において，上記の相互間の関係の際に現れる次のテンソルについて，その意味するものを考えておくことは意義あることである．

デカルト座標系において，



第61図　微小立方体素片の移動と変形

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} \tag{1.8.19}$$

をとるとき，このテンソルを変形勾配テンソル(deformation gradient tensor)とよぶ．ただし，このテンソルは，これを曲線座標系で表示することは，困難である．今このテンソルによって，ベクトル $\{da, 0, 0\}$, $\{0, db, 0\}$, $\{0, 0, dc\}$ を同一座標系内の異なる場所 (x, y, z) における三つのベクトル $\{d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3\}$, $\{d\eta_1, d\eta_2, d\eta_3\}$, $\{d\zeta_1, d\zeta_2, d\zeta_3\}$ に変換する場合を考えてみる（第61図参照）．

$$\begin{bmatrix} d\xi_1 & d\eta_1 & d\zeta_1 \\ d\xi_2 & d\eta_2 & d\zeta_2 \\ d\xi_3 & d\eta_3 & d\zeta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} da & 0 & 0 \\ 0 & db & 0 \\ 0 & 0 & dc \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} d\xi_1 & d\eta_1 & d\zeta_1 \\ d\xi_2 & d\eta_2 & d\zeta_2 \\ d\xi_3 & d\eta_3 & d\zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} da & 0 & 0 \\ 0 & db & 0 \\ 0 & 0 & dc \end{vmatrix} \tag{1.8.20}$$

しかるに，上式右辺の第2項行列式は，ベクトル $d\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{b}, d\boldsymbol{c}$ が形成するブロックの体積を示し，また上式左辺の行列式は，ベクトル $d\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\eta}, d\boldsymbol{\zeta}$ が形成するブロックの体積を示す．したがって，テンソル(1.8.19)式の行列式は，弾性体の変形における体積倍率(volume change magnification)を示すことがわかる．この体積倍率は，$d\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{b}, d\boldsymbol{c}$ 及び $d\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\eta}, d\boldsymbol{\zeta}$ が共に右手座標系または左手座標系を形成するときは(＋)の符号をもち，一方が右手座標系で，他方が左手座標系のときは(－)の符号を有する．

次に，デカルト座標系で

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial a}{\partial z} \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} & \dfrac{\partial b}{\partial z} \\ \dfrac{\partial c}{\partial x} & \dfrac{\partial c}{\partial y} & \dfrac{\partial c}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{1.8.21}$$

なるテンソルを考えれば，上と同様な理由でこのテンソルは明らかに，直角立

方体ブロック，(dx, dy, dz)をmaterial coordinateの平行六面体ブロックに逆変換するテンソルで，(1.8.19)式と(1.8.21)式とは互いに逆行列の関係にある．そのことは，実際に，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}\right) & & 0 \\ & \left(\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}\right) & \\ 0 & & \left(\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & & 0 \\ & \frac{\partial y}{\partial y} & \\ 0 & & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \tag{1.8.22}$$

となることからも容易に理解できる．

また，デカルト座標系では，粒子変位ベクトル $\boldsymbol{u}\{u_1, u_2, u_3\}$ は，

$x_i = a_i + u_i$　（ただし，$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, a_1 = a, a_2 = b, a_3 = c$ とする）

なる関係にあるから，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{\partial u_1}{\partial a}\right) & \frac{\partial u_1}{\partial b} & \frac{\partial u_1}{\partial c} \\ \frac{\partial u_2}{\partial a} & \left(1+\frac{\partial u_2}{\partial b}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial c} \\ \frac{\partial u_3}{\partial a} & \frac{\partial u_3}{\partial b} & \left(1+\frac{\partial u_3}{\partial c}\right) \end{bmatrix} \tag{1.8.23}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial a} & \frac{\partial u_1}{\partial b} & \frac{\partial u_1}{\partial c} \\ \frac{\partial u_2}{\partial a} & \frac{\partial u_2}{\partial b} & \frac{\partial u_2}{\partial c} \\ \frac{\partial u_3}{\partial a} & \frac{\partial u_3}{\partial b} & \frac{\partial u_3}{\partial c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(a,b,c)}\right| = J$$

$$\fallingdotseq \left(1+\frac{\partial u_1}{\partial a}\right)\left(1+\frac{\partial u_2}{\partial b}\right)\left(1+\frac{\partial u_3}{\partial c}\right)$$

$$\fallingdotseq 1+\left(\frac{\partial u_1}{\partial a}+\frac{\partial u_2}{\partial b}+\frac{\partial u_3}{\partial c}\right)=1+(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^{\mathrm{L}} \tag{1.8.24}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial a}{\partial z} \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial y} & \dfrac{\partial b}{\partial z} \\ \dfrac{\partial c}{\partial x} & \dfrac{\partial c}{\partial y} & \dfrac{\partial c}{\partial z} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial(abc)}{\partial(xyz)}\right| = \frac{1}{J}$$

$$\fallingdotseq \left(1-\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\left(1-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\left(1-\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)$$

$$\fallingdotseq 1-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)=1-(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^{\mathrm{E}} \tag{1.8.25}$$

ただし，　(1.8.24)式の$(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^{\mathrm{L}}$は Lagrangian の div を示し，
　　　　(1.8.25)式の$(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})^{\mathrm{E}}$は，Eulerian の div を示す．

以上，デカルト座標系について述べた事柄は，斜交直線座標系についても同様に成立する．ただ斜交直線座標系の場合には，平行六面体の体積は(1.8.20)式の左辺及び同式の右辺第2項の行列式にそれぞれその場合のベクトル成分の variance に応じて，$\epsilon_{123}=\sqrt{g}$ または $\epsilon^{123}=1/\sqrt{g}$ を乗ずることが必要である．

さらに，一般の曲線座標系においても，$\boldsymbol{u}$ を微小な値とし，点(x^1, x^2, x^3)における基底ベクトルと，点(a^1, a^2, a^3)における基底ベクトルとを，同一と見なしてもよい場合には，上記斜交直線座標系について述べた事柄は，すべて，一般の曲線座標系についても，あてはまる．

なお，粒子変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を点(a^1, a^2, a^3)の固着ベクトルとすれば，いかなる座標系の場合にも，次の関係が成立する．

$$\begin{bmatrix} u_1|_1 & u_1|_2 & u_1|_3 \\ u_2|_1 & u_2|_2 & u_2|_3 \\ u_3|_1 & u_3|_2 & u_3|_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1|_1 & \frac{1}{2}(u_2|_1+u_1|_2) & \frac{1}{2}(u_1|_3+u_3|_1) \\ & u_2|_2 & \frac{1}{2}(u_3|_2+u_2|_3) \\ (\mathrm{SYM}) & & u_3|_3 \end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(u_2|_1-u_1|_2) & \frac{1}{2}(u_1|_3-u_3|_1) \\ & 0 & -\frac{1}{2}(u_3|_2-u_2|_3) \\ \text{(ANTISYM)} & & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}+\frac{\sqrt{g}}{2}\begin{bmatrix} 0 & -(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})^3 & (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})^2 \\ & 0 & -(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})^1 \\ \text{(ANTISYM)} & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.8.26)
$$

ただし，　上式(1.8.26)における微分は material coordinate による共変微分を示すものとし，また，$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})^k$, $(k=1,2,3)$ は，$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})$ の反変成分 $u_j|_i\epsilon^{ijk}$ を示すものとする．

また，

$$
\begin{bmatrix} u^1|_1 & u^1|_2 & u^1|_3 \\ u^2|_1 & u^2|_2 & u^2|_3 \\ u^3|_1 & u^3|_2 & u^3|_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u^1|_1 & \frac{1}{2}(u^2|_1+u^1|_2) & \frac{1}{2}(u^1|_3+u^3|_1) \\ & u^2|_2 & \frac{1}{2}(u^3|_2+u^2|_3) \\ \text{(SYM)} & & u^3|_3 \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(u^2|_1-u^1|_2) & \frac{1}{2}(u^1|_3-u^3|_1) \\ & 0 & -\frac{1}{2}(u^3|_2-u^2|_3) \\ \text{(ANTISYM)} & & 0 \end{bmatrix} \quad (1.8.27)
$$

であるが，

$$
\frac{1}{2}(u^j|_i+u^i|_j)\neq\varepsilon_i^j=\frac{1}{2}(u^j|_i+u_i|^j)
$$

$$
(u^j|_i-u^i|_j)\neq(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})^k
$$

なることに注意する必要がある．

1.8.5 微分演算子 ∇ に関する諸公式

本節では，ベクトルの勾配，発散，回転を含む若干の重要な公式について証明をする．証明に際して，∇ を使用する場合，$\boldsymbol{A}$ または $\boldsymbol{B}$ を一定と見なすときは，これに下付添字 0 をつけることとし，また下付添字 0 をつけなくても，∇ による微分演算は，∇ なる文字の記号の前にある文字には及ばず，もっぱら ∇ 記号の後にある文字にのみ及ぶものとする．また $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$ なる記法は，ベクトル $\boldsymbol{A}$ とベクトル ∇ との dot product すなわちスカラーをベクトル $\boldsymbol{B}$ に掛けることを意味し，したがって，得られる結果は $\boldsymbol{B}$ と同方向のベクトルであるが，∇ による微分演算のみは依然として生き残り，ベクトル $\boldsymbol{B}$ に作用することを意味するものとする．すなわち，$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=B^j|_iA^i\boldsymbol{g}_j$ を意味するもの

とする．

1)　$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

$$=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{1.8.28}$$

証明

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_0)+\nabla(\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{B})$$

上式において，$\nabla(\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}_0(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$なることに注意して$\nabla(\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{B})$を求めるために，いったん$\boldsymbol{A}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$なるベクトル三重積を考えることにする．

$$\boldsymbol{A}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=\nabla(\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\quad《\because\ (1.4.62)\text{式による}》$$

$$\therefore\quad\nabla(\boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

同様にして，

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_0)=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_0\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

が得られる．これら二つの式を使って，結局，

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

であることがわかる．(証明終)

2)　$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$　(1.8.29)

証明　∇が単なるベクトルならば，上式の左辺は，スカラー三重積の公式を用いて変形できるわけであるが，微分演算子 ∇ の微分演算は，この場合，ベクトル $\boldsymbol{A}$ 及びベクトル $\boldsymbol{B}$ の双方に及ぶので，単純にベクトル $\boldsymbol{A}$ または $\boldsymbol{B}$ の一つだけを const. としてスカラー三重積の公式を用いることはできない．

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_0)+\nabla\cdot(\boldsymbol{A}_0\times\boldsymbol{B})\\&=(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}_0-\nabla\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}_0)\quad《\because\ (1.4.44)\text{式による}》\\&=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\quad(\text{証明終})\end{aligned}$$

3)　$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$

$$-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) \tag{1.8.30}$$

証明　この場合も∇が単なるベクトルならば，上式の左辺は，ベクトル三重積の公式を用いて変形できるわけであるが，単純にベクトル $\boldsymbol{A}$ または $\boldsymbol{B}$ の一つだけを const. として，ベクトル三重積の公式を用いることはできない．

$$\begin{aligned}\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})&=\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_0)+\nabla\times(\boldsymbol{A}_0\times\boldsymbol{B})\\&=(\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{A}_0(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{B}\\&\qquad《\because\ (1.4.62)\text{式による}》\\&=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\quad(\text{証明終})\end{aligned}$$

4)　$\nabla\times(\nabla\cdot\phi)=\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi)=0$　(1.8.31)

証明　微分演算子∇は，単なるベクトルではないが，この場合，その微分演

算の影響は，単に一つの関数のみに及ぶのであるから，スカラー三重積の公式をそのまま適用することができて，

$$\nabla\times(\nabla\cdot\phi)=(\nabla\times\nabla)\phi$$

しかるに，∇×∇ は同じベクトルのベクトル乗積であるから，

$$\nabla\times\nabla=0 \quad \text{すなわち} \quad (\nabla\times\nabla)\phi=0$$

あるいは，次のようにしても証明できるが，これは，本質的には同一の証明である．

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi=\mathrm{rot}(\phi|_j\boldsymbol{g}^j)=\phi|_j|_i\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k=\phi|_{ji}\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k$$

しかるに，$\phi|_{ji}=\phi|_{ij}$ であるから上式は常に 0 に等しい．（証明終）

5) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=0$ (1.8.32)

証明 この場合には，前項と同様に，スカラー三重積の公式をそのまま適用することができて，

$$\nabla(\nabla\times\boldsymbol{A})=(\nabla\times\nabla)\cdot\boldsymbol{A}=0\cdot\boldsymbol{A}=0$$

あるいは，この場合にも，次のようにして証明することができるが，これも本質的には同一の証明である．

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})&=\mathrm{div}(A_j|_i\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k)\\&=(A_j|_i\epsilon^{ijk})|_k=A_j|_{ik}\epsilon^{ijk}\end{aligned}$$

しかるに，$A_j|_{ik}$ は，i 及び k について，symmetric であるから，上式は常に 0 に等しい．（証明終）

6) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ (1.8.33)

証明 この場合にも，∇を一種のベクトルと見なして演算してよいから，既述の(1.4.62)式から，

$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})&=\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-(\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\\&=\nabla\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\end{aligned} \quad \text{（証明終）}$$

7) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ が恒等的に成立するならば，$\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\,\phi$ のような，スカラー関数 ϕ が存在する《 4)の逆定理》.

証明 この 4)の逆定理の証明は，Stokes の定理の応用として本章で後述することとし，それまで，一応おあずけにしておく．

恒等的に $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ であるようなベクトル $\boldsymbol{u}$ を，ラメラー状ベクトル(lameller vector)または非回転的ベクトル(irrotational vector)といい，ϕ をベクトル $\boldsymbol{u}$ のスカラー・ポテンシャル(scalar potential)という．

8) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0$ が恒等的に成立つならば，$\boldsymbol{u}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ のような，ベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ が存在する《 5)の逆定理》.

このように $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=0$ が恒等的に成立つようなベクトル $\boldsymbol{u}$ をソレノイド状ベクトル(solenoidal vector)または回転的ベクトル (rotational vector)といい，

$\boldsymbol{A}$ をベクトル $\boldsymbol{u}$ のベクトル・ポテンシャル (vector potential) という．

この逆定理の証明は，次のようである．

証明　デカルト座標系において，$\boldsymbol{u}$ の成分を(u_1, u_2, u_3)とすれば，仮定によって，

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z}=0 \qquad \text{(a)}$$

であるが，$\boldsymbol{u}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ のような関数 $\boldsymbol{A}$ が存在することをいうためには，$\boldsymbol{A}$ の直角成分を(A_1, A_2, A_3)とするとき，A_1, A_2, A_3 が

$$u_1=\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z},\qquad u_2=\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x},\qquad u_3=\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y} \qquad \text{(b)}$$

によって決定されることをいえばよい．

まず $A_3=0$ とおくと，上の(b)式の第1式及び第2式から A_2 及び A_1 がそれぞれ，次のように決まる．

$$A_2=-\int_{z=a}^{z}u_1(x, y, z)dz+f(x, y)$$

$$A_1=\int_{z=a}^{z}u_2(x, y, z)dz+g(x, y)$$

ただし，$f(x, y)$及び $g(x, y)$は，それぞれ(x, y)のみの関数とし，aは任意の常数とする．これらを，(b)式の第3式に入れると，

$$u_3(x, y, z)=-\int_{z=a}^{z}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)dz+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}$$

となるが，(a)式によって，

$$-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=\frac{\partial u_3}{\partial z}$$

$$\therefore\quad u_3(x, y, z)=\int_{z=a}^{z}\frac{\partial u_3}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$=u_3(x, y, z)-u_3(x, y, a)+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}$$

となり，両辺の $u_3(x, y, z)$は互いに消し合って，結局，

$$-u_3(x, y, a)+\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial y}=0$$

となる．これを満足するように，任意関数$f(x, y)$, $g(x, y)$を選ぶことは容易であって，たとえば，bを任意の常数として，

$$\left.\begin{aligned}f(x, y)&=\int_{x=b}^{x}u_3(x, y, a)dx\\ g(x, y)&=0\end{aligned}\right\}$$

とすればよいのである．ゆえに，(b)式の特解が，

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \int_{z=a}^{z} u_2(x, y, z)\,dz \\ A_2 &= -\int_{z=a}^{z} u_1(x, y, z)\,dz + \int_{x=b}^{x} u_3(x, y, a)\,dx \\ A_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{c})$$

のように得られ，われわれが証明しようとした逆定理は，デカルト座標系について証明されたことになる．しかるに，この逆定理は，ベクトル(テンソル)について証明されているから，この事実は，座標系に無関係である．

なお，上記の証明は，$A_3=0$ なる特殊な場合が存在することの証明であるが，A_3 が任意の関数である場合についても，証明することができる．すなわち，ϕ を任意のスカラー関数とするとき，(c)式で与えられる，A_1, A_2, A_3 のおのおのに grad ϕ の成分 $\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z$ をそれぞれ加えたものを考えると，前の 4)項で述べたように rot grad $\phi=0$ であるから，このような成分を有するベクトル関数の回転もまた rot $\boldsymbol{A}$ と同様に，ベクトル $\boldsymbol{u}$ に等しくなる．ゆえに，さらに一般的な解は，(c) 式で与えられるベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ に，任意のスカラー関数 ϕ の勾配を加えたもので与えられる．$\partial\phi/\partial z$ が任意な関数になるように ϕ を定めることは，常に可能であるから，A_3 が任意の関数であるときにも，上述の証明と同様な証明が成立つことがわかる．

しかし，ここで上述のようにして求めたベクトル関数 $\boldsymbol{A}'$，すなわち，

$$\left.\begin{aligned} A'_1 &= \int_{z=a}^{z} u_2(x, y, z)\,dz + \frac{\partial\phi}{\partial x} = A_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ A'_2 &= -\int_{z=a}^{z} u_1(x, y, z)\,dz + \int_{x=b}^{x} u_3(x, y, a)\,dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} = A_2 + \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ A'_3 &= A_3 + \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{d})$$

が，別途 $A_1=0$ として，上述の解析と同様な解析を行って得た次式，

$$\left.\begin{aligned} A''_1 &= \frac{\partial\phi'}{\partial x} \\ A''_2 &= \int_{x=a'}^{x} u_3(x, y, z)\,dx + \frac{\partial\phi'}{\partial y} \\ A''_3 &= -\int_{x=a'}^{x} u_2(x, y, z)\,dx + \int_{y=b'}^{y} u_1(a', y, z)\,dy + \frac{\partial\phi'}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{e})$$

(ただし，ϕ'：任意のスカラー関数)

を網羅するものであるかどうかが疑問になる．

上述のようにして，別途求めたベクトル関数 $\boldsymbol{A}''$ を，ベクトル関数 $\boldsymbol{A}'$ が網羅することを証明するためには，任意関数 ϕ を調整して，常に，

$$\left.\begin{aligned}A'_1 &\equiv A_1+\frac{\partial\phi}{\partial x}=A''_1\\ A'_2 &\equiv A_2+\frac{\partial\phi}{\partial y}=A''_2\\ A'_3 &\equiv A_3+\frac{\partial\phi}{\partial z}=A''_3\end{aligned}\right\}\qquad\text{(f)}$$

ならしめることが可能であること，言い換えれば，(f)式を成立せしめるような，スカラー関数ϕが存在することを証明すればよい．

しかるに(f)式は，

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=A''_1-A_1,\qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=A''_2-A_2,\qquad \frac{\partial\phi}{\partial z}=A''_3-A_3$$

と書き直すことができ，ベクトル$(\boldsymbol{A}''-\boldsymbol{A})$の回転は，

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}''-\boldsymbol{A})=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}''-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}=0$$

であるから，$\mathrm{grad}\,\phi=(\boldsymbol{A}''-\boldsymbol{A})$なるような，スカラー関数$\phi$は，必ず存在する《前述の7)項による》．したがって，上述のようにして求めたベクトル関数$\boldsymbol{A}'$は別途求めたベクトル関数$\boldsymbol{A}''$をも網羅する一般解であることがわかる．(証明終)

1.8.6　粒子速度(分子速度)$\boldsymbol{v}$と流速$\bar{\boldsymbol{v}}$との関係

或る分子点の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_0$，その material coordinate を(a^1, a^2, a^3)とし，また或る時間経過後の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}$，そのときの spatial coordinate を$(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3)$とすれば，この分子点の変位$\boldsymbol{u}$は，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0\\ &\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\phi}(x^1, x^2, x^3)=\boldsymbol{f}(t-t_0, a^1, a^2, a^3)\\ &\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{\phi}(a^1, a^2, a^3)=\boldsymbol{f}(0, a^1, a^2, a^3)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}^i=\varphi^i(t-t_0, a^1, a^2, a^3),\qquad a^i=\psi^i(t-t_0, x^1, x^2, x^3)$$

である．$\boldsymbol{r}$及び$\boldsymbol{r}_0$はそれぞれ，位置ベクトルであるから，一般の曲線座標系では，基底ベクトル$\boldsymbol{g}_i$は，座標原点と，$\boldsymbol{x}^i$または$a^i(i=1,2,3)$なる座標点との2点間の有限な距離の間で刻々と変化するので，ベクトル$\boldsymbol{r}$及び$\boldsymbol{r}_0$は，それぞれ$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{x}^i\boldsymbol{g}_i$または，$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{a}^i\boldsymbol{g}_i$なる形に表示することはできない．もしも，このような形に表示するとすれば，点$(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^3)$及び点$(a^1, a^2, a^3)$における基底ベクトル$\boldsymbol{g}_i$及び$\boldsymbol{g}'_i$を用い，それらの点の固着ベクトルとしてそれぞれ$\boldsymbol{r}=r^i\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{r}_0=r_0{}^i\boldsymbol{g}'_i$のように表示しなければならない．

しかしながら，Δt秒後のベクトル$\boldsymbol{r}$及び$\boldsymbol{u}$の増分を，それぞれ$\Delta\boldsymbol{r}$及び$\Delta\boldsymbol{u}$とすれば，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0$なる関係があるから，

$$\Delta\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}$$

ゆえに，分子点の速度 $\boldsymbol{v}$ は一般の曲線座標系においても，

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{dx^i}{dt}=\frac{dx^i}{dt}\boldsymbol{g}_i$$

$$\text{i.e.,}\quad v^i=\frac{dx^i}{dt}=\left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)_{a^1,a^2,a^3}$$

のように座標成分を用いて表すことができる．

一般に分子点 (a^1, a^2, a^3) を一定として，時間 t によって，微分するときは，$D(\quad)/Dt$ なる記号を用い，これを "particle time derivative" という．この記号を用いれば，分子点の速度，すなわち粒子速度 $\boldsymbol{v}$ は，

$$\boldsymbol{v}=\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=\frac{Dx^i}{Dt}\boldsymbol{g}_i$$

$$v^i=\frac{Dx^i}{Dt}=\frac{D\varphi^i}{Dt} \tag{1.8.34}$$

また一方，点 (x^1, x^2, x^3) を固定して(一定として) $\Delta\boldsymbol{u}$ を Δt で微分すれば，

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{d(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{dt}=\frac{-d\boldsymbol{r}_0}{dt}=-\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial a^i}\frac{\partial a^i}{\partial t}=-\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_{x^1,x^2,x^3}\cdot\boldsymbol{g}_i$$

を得る．ただし，この場合の $\boldsymbol{g}_i$ は，点 (a^i) における基底ベクトルである．このようにして得られた速度を流速といい，本書では $\bar{\boldsymbol{v}}$ なる記号で表すことにする．また今の場合のように，空間の点 (x^1, x^2, x^3) を指定して，時間 t によって微分するときは $\partial(\quad)/\partial t$ なる記号を用い，これを "local time derivative" とよぶ．そうすると，

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)_{x^1,x^2,x^3}=-\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_{x^1,x^2,x^3}\boldsymbol{g}_i$$

$$\bar{v}^i=-\left(\frac{\partial a^i}{\partial t}\right)_{x^1,x^2,x^3}=-\frac{\partial \psi^i}{\partial t} \tag{1.8.35}$$

となる．

さて，時刻 t と，点の位置 (x^1, x^2, x^3) とによって定まる任意のスカラー量 $p(t, x^1, x^2, x^3)$ の，時間 t に関する二つの微係数の間には次の関係がある．

$$\frac{Dp}{Dt}=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{x^1,x^2,x^3}+\left(\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)_{t,x^j,x^k}\cdot\frac{Dx^i}{Dt}$$

$$=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)+v^i\left(\frac{\partial p}{\partial x^i}\right) \tag{1.8.36 a}$$

$$=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} p \tag{1.8.36 b}$$

上式(1.8.36 b)における第2項 $(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad} p)$ を "p の convection" とよぶ．また，時刻 t と，点の位置 (x^1, x^2, x^3) とによって定まる任意のベクトル量(たとえば，分子速度) $\boldsymbol{v}$ の時間に関する二つの微係数の間には，次の関係がある．

$$\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_x+\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}\frac{Dx^j}{Dt}$$
$$=\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right)_x+v^j\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x^j}$$
$$=\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}\right)_x\boldsymbol{g}_i+v^j\cdot v^i|_j\boldsymbol{g}_i=(\dot{v}^i+v^j\cdot v^i|_j)\boldsymbol{g}_i \qquad (1.8.37\ \mathrm{a})$$
$$\therefore\quad \alpha^i=\frac{Dv^i}{Dt}=\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}\right)_x+v^j\cdot v^i|_j \qquad (1.8.37\ \mathrm{b})$$
$$=\dot{v}^i+\boldsymbol{v}\cdot(\mathrm{grad}\, v^i)=\bar{\alpha}^i+\boldsymbol{v}\cdot(\mathrm{grad}\, v^i) \qquad (1.8.37\ \mathrm{c})$$

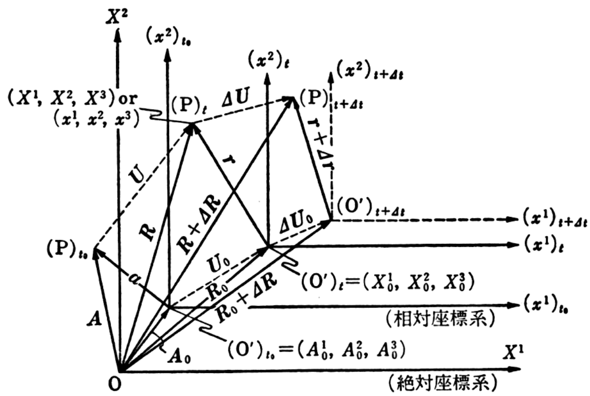
ここで注意すべきことは，(1.8.36)式の$\partial p/\partial x^i=p_{,i}$は，スカラー$p(t,x^1,x^2,x^3)$を，単に$x^i$で偏微分するだけであったが，(1.8.37)式の$\partial \boldsymbol{v}/\partial x^j=\boldsymbol{v}_{,j}$は，単に$v^i(t,x^1,x^2,x^3)$の$x^j$による偏微分だけでなく，$\boldsymbol{g}_k(x^1,x^2,x^3)$の$x^j$による偏微分をも含むことである．また$p$や$\boldsymbol{v}$は，時間に関連のある量であるが，$\boldsymbol{g}_i=\partial \boldsymbol{r}/\partial x^i$，$g_{ij}$，$\epsilon_{ijk}$及び Christoffel's symbol Γ は，いずれも空間の幾何学そのものに関する量すなわち，単に space 内の座標(x^1,x^2,x^3)にのみ関連する量で，常に直接的には，時間に無関係な量として取扱われることである．

(1.8.37)式における$\boldsymbol{v}$を或る分子点の速度ベクトルとすれば，$\boldsymbol{\alpha}$はその分子点の加速度ベクトルを示し，$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$は空間の一定点における粒子速度の変化割合を示す．流体の流れが定常 (stationary) でない場合には，一定点(x^1,x^2,x^3)における速度(流速)は時間と共に変化するが，$\dot{v}^i$はその値を示す．流体の流れが，定常 (stationary) な場合には$\dot{v}^i=0$であるが，この場合でも，分子点は時間dtの間に，速度の異なる他の空間点に移動するから，分子速度は変化することになる．この原因に由来する加速度の量(速度の増加量)は，分子速度の共変微分$v^i|_j$と，時間dtの間に分子点が動く距離(変位)の成分，v^jdtとの dot product に等しい．

1.8.7　絶対座標系，相対座標系及び絶対速度 $\boldsymbol{V}$，相対速度 $\boldsymbol{v}^*$

二つの座標系が相対的に平行移動する場合について考えてみよう．今，空間に固定した剛結枠座標系(これを絶対座標系とよぶ)に関する諸量を大文字で表し，空間内で移動する剛結枠座標系(これを相対座標系とよぶ)に関する諸量を小文字で表すことにし，また，相対座標系の原点に関する諸量には，文字の右下に添字0をつけて表す(第62図)ことにする．さらに，相対座標系の基底ベクトルには，同一点の絶対座標系における基底ベクトルの右肩に＊印を付して表すことにする．そうすると，分子点Pの絶対速度$\boldsymbol{V}$は，

$$\boldsymbol{V}=\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt}=\frac{D(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{A})}{Dt}=\frac{DX^i}{Dt}\boldsymbol{g}_i$$
$$=\frac{D(\boldsymbol{R}_0+\boldsymbol{r}-\boldsymbol{A}_0-\boldsymbol{a})}{Dt}=\frac{D(\boldsymbol{U}_0+\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})}{Dt}$$



第62図　並進運動をする相対座標系

$$=\frac{D\boldsymbol{U}_0}{Dt}+\frac{D\boldsymbol{r}}{Dt}=\frac{DX_0{}^i}{Dt}\boldsymbol{g}_i+\frac{Dx^i}{Dt}\boldsymbol{g}_i{}^*$$

$$=\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{v}^* \tag{1.8.38}$$

ゆえに，絶対加速度を $\bar{\boldsymbol{A}}$ で表せば，(1.8.37) 式を応用して，次の関係式が得られる．

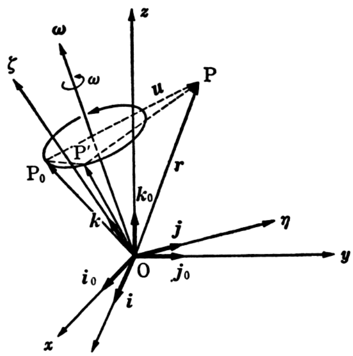
$$\bar{\boldsymbol{A}}=\frac{D\boldsymbol{V}_0}{Dt}+\frac{D\boldsymbol{v}^*}{Dt}$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial V_0{}^i}{\partial t}\right)_{X_0}+V_0{}^j\cdot V_0{}^i|_j\right\}\boldsymbol{g}_i+\left\{\left(\frac{\partial v^{*i}}{\partial t}\right)_x+v^{*j}v^{*i}|_j\right\}\boldsymbol{g}_i{}^* \tag{1.8.39}$$

ただし，$\boldsymbol{g}_i$：点 $(X_0{}^1, X_0{}^2, X_0{}^3)$ における絶対座標系の基底ベクトル
　　$\boldsymbol{g}_i{}^*$：点 (x^1, x^2, x^3) における相対座標系の基底ベクトル
とする．

次に，絶対座標系に対して，相対座標系が原点を共有して回転運動をする場合について考えてみよう．

解析を簡単にするために，まずデカルト座標系が原点を共有して回転運動をする場合を考え，その後でこれを一般化する方法をとることにする．固定デカルト座標系を (x, y, z) で表し，これと原点を共有して回転するデカルト座標系を (ξ, η, ζ) で表すことにする．また，固定デカルト座標系の基底ベクトルを $(\boldsymbol{i}_0, \boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}_0)$ とし，回転デカルト座標系の基底ベクト



第63図　回転運動をする相対座標系

ルを $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ とする(第63図参照)．そうすると，分子点Pの絶対粒子速度 $\boldsymbol{v}$ について，次の関係式が成立する．

$$\boldsymbol{v}=\frac{D\boldsymbol{r}}{Dt}=\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=\frac{Dx}{Dt}\boldsymbol{i}_0+\frac{Dy}{Dt}\boldsymbol{j}_0+\frac{Dz}{Dt}\boldsymbol{k}_0$$
$$=\frac{D\xi}{Dt}\boldsymbol{i}+\frac{D\eta}{Dt}\boldsymbol{j}+\frac{D\zeta}{Dt}\boldsymbol{k}+\xi\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+\eta\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+\zeta\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \tag{1.8.40}$$

上式の回転デカルト座標系の基底ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ は空間に固定したベクトルではなく，時間とともに回転運動をする単位ベクトルで，時間 t のみの関数である．したがってこれらの時間による微係数はまた，一つのベクトルで，その結果は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}&=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}\\ \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}&=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}\\ \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}&=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}\end{aligned}\right\} \tag{1.8.41}$$

ただし，$\boldsymbol{\omega}$ は回転と右ネジの関係にある回転軸方向の回転角速度ベクトルとする

何となれば，単位ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ はそれぞれ，回転軸の周りに同一の角速度で回転し，これらの単位ベクトルの先端は，回転軸を中心軸とし，半径が，ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と，それぞれの単位ベクトル $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とのベクトル乗積であるような，円筒表面の円周上を回転するからである．

(1.8.41)式を，(1.8.40)式に代入すると，

$$\boldsymbol{v}=\frac{D\boldsymbol{r}}{Dt}=\frac{D\xi}{Dt}\boldsymbol{i}+\frac{D\eta}{Dt}\boldsymbol{j}+\frac{D\zeta}{Dt}\boldsymbol{k}+\xi(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i})+\eta(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j})+\zeta(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k})$$
$$=\frac{D\xi}{Dt}\boldsymbol{i}+\frac{D\eta}{Dt}\boldsymbol{j}+\frac{D\zeta}{Dt}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\omega}\times(\xi\boldsymbol{i}+\eta\boldsymbol{j}+\zeta\boldsymbol{k})$$
$$=\frac{D\xi}{Dt}\boldsymbol{i}+\frac{D\eta}{Dt}\boldsymbol{j}+\frac{D\zeta}{Dt}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{r}$ は分子点Pの位置ベクトルで，$\boldsymbol{r}=\xi\boldsymbol{i}+\eta\boldsymbol{j}+\zeta\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}_0+y\boldsymbol{j}_0+z\boldsymbol{k}_0$ である．

簡単のために，

$$\frac{D\xi}{Dt}\boldsymbol{i}+\frac{D\eta}{Dt}\boldsymbol{j}+\frac{D\zeta}{Dt}\boldsymbol{k}=\frac{D^*\boldsymbol{r}}{Dt} \tag{1.8.42}$$

とおけば，これは分子点Pに対する位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の相対座標系成分の，時間による微係数を成分とするベクトルで，相対座標系内での相対速度を表すものである．そこで，これをさらに簡単に $\boldsymbol{v}^*$ として表すことにすると，絶対速度

$\boldsymbol{v}=D\boldsymbol{r}/Dt$ は，結局，

$$\boldsymbol{v}=\frac{D\boldsymbol{r}}{Dt}=\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt}=\frac{Dx}{Dt}\boldsymbol{i}_0+\frac{Dy}{Dt}\boldsymbol{j}_0+\frac{Dz}{Dt}\boldsymbol{k}_0$$
$$=\frac{D^*\boldsymbol{r}}{Dt}+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$
$$=\boldsymbol{v}^*+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{1.8.43}$$

となる．上式はデカルト座標系について証明されたけれども，結果として得られた上式，(1.8.43)式は，テンソル形式であるから，座標系のいかんを問わず成立する式で，かつ固定座標系と回転座標系とは，本節前段の並進相対座標系の場合と同様に，同一種類の座標系であることを，必ずしも要しない．ただし，この場合 $\boldsymbol{r}$ は位置ベクトルであって，一つの座標点に固着したベクトルではないから，回転座標系が，曲線座標系の場合には，これを回転座標系の成分で表示することはできない．(1.8.43)式を“回転座標系に関する速度の定理”と唱える．

次に $\boldsymbol{r}$ の代りに，固着ベクトル $\boldsymbol{v}$ をとれば(1.8.43)式の誘導のときと同様にして，絶対加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}$ が，次のように求められる．

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{Dv_\xi}{Dt}\boldsymbol{i}+\frac{Dv_\eta}{Dt}\boldsymbol{j}+\frac{Dv_\zeta}{Dt}\boldsymbol{k}+v_\xi\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+v_\eta\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+v_\zeta\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}$$
$$=\frac{D^*\boldsymbol{v}}{Dt}+v_\xi(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i})+v_\eta(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j})+v_\zeta(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k})$$
$$=\frac{D^*\boldsymbol{v}}{Dt}+\boldsymbol{\omega}\times(v_\xi\boldsymbol{i}+v_\eta\boldsymbol{j}+v_\zeta\boldsymbol{k})$$
$$=\frac{D^*\boldsymbol{v}}{Dt}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v} \tag{1.8.44}$$

ただし，$\boldsymbol{v}$：絶対速度，v_ξ, v_η, v_ζ：絶対速度の回転デカルト座標系に対する成分，D^*/Dt：分子点を固定し回転座標系に対する成分を微分する記号

(1.8.44)式では，$\boldsymbol{v}$ は位置ベクトルではなく，一つの座標点に固着したベクトルであるから，(1.8.44)式は，一般座標系の場合にも，次のように成分表示することができる．

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\left\{\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}\right)_{(\xi)}\boldsymbol{g}_i{}^*+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial\xi^j}\;\frac{D\xi^j}{Dt}\right\}+\omega_j v_k\epsilon^{*ijk}\boldsymbol{g}_i{}^*$$
$$=\left\{\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}\right)_{(\xi)}+v^{*j}v^i|_j+\omega_j v_k\epsilon^{*ijk}\right\}\boldsymbol{g}_i{}^* \tag{1.8.45}$$

ただし，v^i：絶対速度の回転座標系に対する反変成分，(ξ^i, ξ^j, ξ^k)：回転座標系，ω_j：点 (ξ^i, ξ^j, ξ^k) における(回転座標系の)回転角速度の回転座標系に対する共変成分，

ϵ^{*ijk}：回転座標系の点(ξ^i, ξ^j, ξ^k)における交代テンソル，

$\boldsymbol{g}_i^*$：回転座標系の点(ξ^i, ξ^j, ξ^k)における基底ベクトル

上式(1.8.45)は，絶対加速度を絶対速度及び相対速度を共用して表した式であるが，さらに絶対加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}$ は，相対加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}^*$，及び相対速度 $\boldsymbol{v}^*$ のみを用いて表示することもできる．すなわち，(1.8.43)式から，

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{D\boldsymbol{v}^*}{Dt}+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)+\left(\boldsymbol{\omega}\times\frac{D\boldsymbol{r}}{Dt}\right)$$

$$=\frac{D\boldsymbol{v}^*}{Dt}+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}) \tag{1.8.46}$$

$$=\frac{D^*\boldsymbol{v}^*}{Dt}+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^*)+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)+\{\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}^*+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\}$$

《∵ (1.8.44)式及び(1.8.43)式による》

$$=\overline{\boldsymbol{a}}^*+2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^*)+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{1.8.47}$$

上式中，$(d\boldsymbol{\omega}/dt)\times\boldsymbol{r}$ は回転座標系の回転に基づく分子点Pの線加速度であり，また $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ は回転座標系の回転による線速度，したがって $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ は，回転座標系の回転に基づく分子点の求心加速度である．(1.8.47)式を **“Coriolis の定理”** と唱える．

(1.8.46)式には，$\boldsymbol{v}^*$ が含まれているが，(1.8.43) 式を使って $\boldsymbol{v}^*$ を $\boldsymbol{v}$ で書き改めて $\boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$を，(1.8.47)式の$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^*)$の項に入れると，

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^*)=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$$

となるから，(1.8.47)式はまた，

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\overline{\boldsymbol{a}}^*+2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{1.8.48}$$

のように書き表すこともできる．

また，(1.8.44)式と(1.8.46)式とを比較して，

$$\frac{D^*\boldsymbol{v}}{Dt}=\frac{D\boldsymbol{v}^*}{Dt}+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)$$

$$=\frac{D^*\boldsymbol{v}^*}{Dt}+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^*)+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)$$

$$=\overline{\boldsymbol{a}}^*+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^*)+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right) \tag{1.8.49}$$

なる関係式が得られる．

最後に，相対座標系が，並進運動と回転運動とを同時に行う場合には，相対座標系の運動を，並進運動と回転運動との二つの運動の和として考え，まず絶対速度 $\boldsymbol{V}$ については，(1.8.38)式の $\boldsymbol{v}^*$ の代りに，(1.8.43)式の $\boldsymbol{v}$ を用いて，

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0+\{\boldsymbol{v}^*+(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})\} \tag{1.8.50}$$

が得られ，また絶対加速度 $\bar{\boldsymbol{A}}$ については，(1.8.39) 式の $D\boldsymbol{v}^*/Dt$ の代りに，(1.8.47)式の $\bar{\boldsymbol{a}}$ を代入して，

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\frac{D\boldsymbol{V}_0}{Dt}+\bar{\boldsymbol{a}}^*+2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}^*)+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \quad (1.8.51)$$

が得られ，あるいは，(1.8.39)式の $D\boldsymbol{v}^*/Dt$ の代りに，(1.8.48)式の $\bar{\boldsymbol{a}}$ を代入すれば，

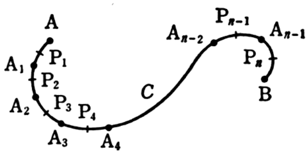
$$\bar{\boldsymbol{A}}=\frac{D\boldsymbol{V}_0}{Dt}+\bar{\boldsymbol{a}}^*+2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v})+\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}\right)-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \quad (1.8.52)$$

ただし，$\boldsymbol{V}$：分子点の絶対速度，$\boldsymbol{V}_0$：相対座標系原点の絶対速度，$D\boldsymbol{V}_0/Dt$：相対座標系原点の絶対加速度，$\bar{\boldsymbol{A}}$：分子点の絶対加速度，$\boldsymbol{v}^*$：分子点の相対速度，$\bar{\boldsymbol{a}}^*$：分子点の相対加速度，$\boldsymbol{r}$：分子点の相対座標系内における位置ベクトル，$\boldsymbol{\omega}$：相対座標系の回転角速度ベクトル

が得られる．

1.8.8 線　積　分

デカルト座標系の空間に，一つのスカラー場 $\phi(x,y,z)$と，2点 A, B を結ぶ空間曲線 $C: x=x(s), y=y(s), z=z(s)$ $(s_0 \leqq s \leqq s_1)$ が与えられているとする．この場合，曲線 AB を点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ で細分し，弧 AA_1, $A_1A_2, \cdots, A_{n-1}B$ の長さをそれぞれ，$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n$ とし，弧 $AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}B$ 上にそれぞれ任意の点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ をとって，



第64図　線積分

$$\sum_{i=1}^{n}\phi(P_i)\Delta s_i$$

を作れば，$\Delta s_i \to 0$ ならしめるとき，上の極限は，

$$\int_{s_0}^{s_1}\phi(x,y,z)ds=\int_{s_0}^{s_1}\phi(s)ds \quad (1.8.53)$$

となる．これをスカラー $\phi(x,y,z)$ の曲線 C に沿っての線積分 (line integral) といい，これを $\int_C \phi(s)ds$ と書くこともある．またこの曲線 C が閉じているときには，$\oint_C \phi(s)ds$ と書くこともある．

上の場合，ベクトル $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ の x, y, z 成分をそれぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ として，

$$\sum_{i=1}^{n}\phi(P_i)\Delta x_i, \qquad \sum_{i=1}^{n}\phi(P_i)\Delta y_i, \qquad \sum_{i=1}^{n}\phi(P_i)\Delta z_i$$

を作って，その極限を考えたものを，それぞれ，

$$\int_{AB}\phi(x,y,z)dx,\qquad \int_{AB}\phi(x,y,z)dy,\qquad \int_{AB}\phi(x,y,z)dz \quad (1.8.54)$$

と書くが，これらはいずれも線積分である．何となれば曲線Cの始点から終点に向かう方向の単位接線ベクトルを$\boldsymbol{t}\{t_x, t_y, t_z\}$とすれば，上式はいずれも，

$$\int_{AB}\phi(s)t_x ds=\int_{AB}\phi(s)\frac{dx}{ds}ds$$

$$\int_{AB}\phi(s)t_y ds=\int_{AB}\phi(s)\frac{dy}{ds}ds$$

$$\int_{AB}\phi(s)t_z ds=\int_{AB}\phi(s)\frac{dz}{ds}ds \qquad (1.8.55)$$

の形に書き表すことができ，これは最初に説明した線積分にほかならないからである．しかしながら，(1.8.53)式で示された線積分を，

$$\int_{s_0}^{s_1}\phi(s)ds=\int_{x_0}^{x_1}\phi(x,y,z)\frac{\partial s}{\partial x}dx+\int_{y_0}^{y_1}\phi(x,y,z)\frac{\partial s}{\partial y}dy +\int_{z_0}^{z}\phi(x,y,z)\frac{\partial s}{\partial z}dz$$

のようにして，単純に積分してはならない．また同様に(1.8.54)式の積分も，

$$\int_{x_0}^{x_1}\phi(x,y,z)dx,\qquad \int_{y_0}^{y_1}\phi(x,y,z)dy,\qquad \int_{z_0}^{z_1}\phi(x,y,z)dz$$

のようにして，単純に積分を施してはならない．何となれば，$\phi(x,y,z)$は，一般にx，またはy，またはzについて一価関数とは限らないばかりでなく，x, y, zはいずれも一つの変数sの関数(従属変数)であって，それぞれ互いに独立な変数ではないからである．

次に，曲線ABに沿って，一つのベクトル場$\boldsymbol{A}$が与えられている場合には，$\boldsymbol{A}$と，曲線ABの接線ベクトル$\boldsymbol{t}\cdot ds$（$\boldsymbol{t}$：接線方向の単位ベクトル）との dot product，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds$は曲線に沿って定義された一つのスカラー$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t})$と$ds$との積とも考えられるから，

$$\int_{AB}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\cdot ds=\int_{AB}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (\text{ただし，}\boldsymbol{r}\text{：P点の位置ベクトル})$$

は，スカラー$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t})$の曲線$C$に沿う線積分，$\int_{AB}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t})ds$と同じである．したがって積分$\int_{AB}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$のことを，ベクトル$\boldsymbol{A}$の曲線$C$に沿う“接線線積分”(tangential line integral)というが，この線積分は，上述のように，一つのスカラーの線積分に帰する．この場合にも，線積分$\int_{AB}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds$は，

$$\int_{AB}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}ds=\int_{AB}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$=\int_{AB} A_x(s)\frac{dx}{ds}ds+\int_{AB} A_y(s)\frac{dy}{ds}ds+\int_{AB} A_z(s)\frac{dz}{ds}ds \tag{1.8.56}$$

のように，一つの変数 s について，かつ曲線Cに沿って始点から終点まで，積分を実施しなければならぬことに注意する必要がある．上式でもし，$\boldsymbol{A}$が力の場を表せば，上式は力 $\boldsymbol{A}$ が，質点をAからBまで，この曲線に沿って移動させる間にする仕事を表している．もし，$\boldsymbol{A}$ が rotation をもたないで，そのために，スカラーϕをポテンシャルとしてもつならば，第1.8.5節，7)項によって，$\boldsymbol{A}=\nabla\phi$ である．したがって，

$$\int_{AB}(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{AB}\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(\frac{dx}{ds}\right)ds+\int_{AB}\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\frac{dy}{ds}\right)ds+\int_{AB}\frac{\partial\phi}{\partial z}\left(\frac{dz}{ds}\right)ds$$
$$=\int_{AB}d\phi=\phi(\mathrm{B})-\phi(\mathrm{A}) \tag{1.8.57}$$

である．たとえば，電場を $\boldsymbol{E}$，電位をϕとすれば(第 1.8.1 節及び第 1.8.2 節参照)，

$$\int_{AB}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{AB}(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r}=\phi(\mathrm{A})-\phi(\mathrm{B})$$

である．もし空間曲線 AB が閉曲線ならば，

$$\oint(\nabla\cdot\phi)\cdot d\boldsymbol{r}=0 \tag{1.8.58}$$

もし，点Aから点Bに至る二つの曲線 C_1 と C_2 とを考えれば，C_1 に沿ってAからBに進み，次に C_2 を逆にBからA に辿れば，一つの閉曲線を得るから，上の(1.8.58)式を適用して，

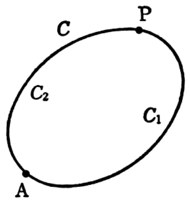
$$\int_{A(C_1)}^{B}(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r}-\int_{A(C_2)}^{B}(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r}=0$$
$$\therefore\quad\int_{A(C_1)}^{B}(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{A(C_2)}^{B}(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r} \tag{1.8.59}$$

すなわち，AからBまでの線積分，$\int_A^B(\nabla\phi)\cdot d\boldsymbol{r}$ は，その途中の道筋に無関係である．さらに(1.8.59)式の逆も真であって，次のような定理が成立つ．すなわち，

定理　"すべての単一閉曲線に沿ってのベクトル関数 $\boldsymbol{A}(x^1,x^2,x^3)$ の線積分が 0 である場合には，$\boldsymbol{A}$は実は，或るスカラー関数 $\phi(x^1,x^2,x^3)$の勾配に等しい．"

この定理の証明は次のようである．

任意の単一閉曲線をCとすると，仮定により$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=0$ である．今，C上に定点A及び任意点Pをとり，A, P によって曲線 Cを二つの部分 C_1, C_2 に分け



第65図　閉曲線における線積分

る(第65図)．すなわち $C=C_1+C_2$ とする．そうすると上式(仮定)から，

$$\int_{A(C_1)}^{P} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{A(C_2)}^{P} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を得る．すなわちA点を定点として，P点を座標 (x^1, x^2, x^3) の点とするとき，

$$\int_{A}^{P} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

の値は，前述のように，P点の位置 (x^1, x^2, x^3) のみによって定まり，AからPに至る道筋には無関係であることが知れるから，

$$\int_{A}^{P} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\phi(x^1, x^2, x^3)$$

のような，座標 (x^1, x^2, x^3) のみによって定まるスカラー関数 $\phi(x^1, x^2, x^3)$ が存在することになる．Pにきわめて近接した一つの点を P′ とし，その座標を，$x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3$ とすると，

$$\int_{A}^{P'} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\phi(x^1+dx^1, x^2+dx^2, x^3+dx^3)=\phi(x^1, x^2, x^3)+d\phi(x^1, x^2, x^3)$$

$$=\int_{A}^{P} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}+\int_{P}^{P'} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

となるが，P と P′ とはきわめて近接した 2 点であるから，

$$\int_{P}^{P'} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (\text{ただし，}\overrightarrow{PP'}=d\boldsymbol{r})$$

$$\therefore\quad \int_{A}^{P'} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\phi(x^1, x^2, x^3)+\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

となる．ゆえに，

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=d\phi(x^1, x^2, x^3)$$

しかるに，$\nabla\phi=\mathrm{grad}\,\phi$ を考え，これと $d\boldsymbol{r}$ とのスカラー積を作ると，これは，ベクトル $d\boldsymbol{r}$ についての，スカラー関数 ϕ の方向的増分 $d\phi$ であるから，

$$\nabla\phi\cdot d\boldsymbol{r}=d\phi$$

となる．ゆえに，

$$(\boldsymbol{A}-\nabla\phi)d\boldsymbol{r}=0$$

という関係式が得られる．一般に，二つのベクトルのスカラー積が 0 になるのは，そのうちのいずれか一つが，零ベクトルであるか，そうでなければ，二つのベクトルが互いに直交するときなのであるが，P′ は全く任意にとることができ，したがって $d\boldsymbol{r}=\overrightarrow{PP'}$ は，全く任意にとれるから，これは零ベクトルではなく，また $(\boldsymbol{A}-\nabla\phi)$ というベクトルに常に垂直であるということもない．したがって結局，

$$A-\nabla\phi=0$$

すなわち，
$$A=\nabla\phi=\operatorname{grad}\phi$$
でなければならないことがわかる．

1.8.9 面　積　分

デカルト座標系の空間に一つのスカラー場 $\phi(x,y,z)$ と，一つの曲面 S とが与えられているとする． S を曲線の網で細分して，そのおのおのの面積を $\varDelta S_i$ とし，その中にそれぞれ任意の点 P_i をとり，$\phi(\mathrm{P}_i)\varDelta S_i$ を作り，その和 $\sum_i\phi(\mathrm{P}_i)dS_i$ を作れば，その極限

$$\iint_S\phi(x,y,z)dS$$

は，スカラー関数 ϕ の，この曲面 S に関する面積分 (surface integral) とよばれる．上の場合 $\varDelta S_i$ の yz, zx, xy 平面上への正射影をそれぞれ $\varDelta y_i\varDelta z_i$, $\varDelta z_i\varDelta x_i$, $\varDelta x_i\varDelta y_i$ とするとき，

$$\sum_i\phi(\mathrm{P}_i)\varDelta y_i\varDelta z_i,\qquad \sum_i\phi(\mathrm{P}_i)\varDelta z_i\varDelta x_i,\qquad \sum_i\phi(\mathrm{P}_i)\varDelta x_i\varDelta y_i$$

の極限をそれぞれ，

$$\iint_S\phi(x,y,z)dydz$$

$$\iint_S\phi(x,y,z)dzdx$$

$$\iint_S\phi(x,y,z)dxdy$$

と書き表す． $\varDelta S$ の法線方向（S の表裏を定めて，法線の向きを定めておく）の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}\{n_x, n_y, n_z\}$ とすれば，

$$dydz=n_xdS,\qquad dzdx=n_ydS,\qquad dxdy=n_zdS$$

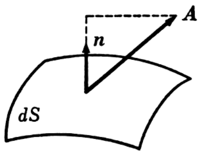
であるから，上式はそれぞれ，

$$\iint_S\phi(x,y,z)n_xdS,\qquad \iint_S\phi(x,y,z)n_ydS,\qquad \iint_S\phi(x,y,z)n_zdS \tag{1.8.60}$$

となる．したがって，

$$\iint_S\phi(x,y,z)dydz,\qquad \iint_S\phi(x,y,z)dzdx,\qquad \iint_S\phi(x,y,z)dxdy$$

はいずれも，それぞれ $\phi(x,y,z)n_x, \phi(x,y,z)n_y, \phi(x,y,z)n_z$ なるスカラー関数の曲面 S に関する面積分に帰することがわかる．ただし，ここでもまた，x, y, z のなかの二つを自変数，残り一つを従属変数とし，微小面積素片の面積ベクトルの方向が，初めに定めた曲面の法線方向となるように積分を実施して



第66図　ベクトルAと微小面積素片dS 及びその単位法線ベクトルn

曲面全部を蔽いつくすことが必要である．

さて曲面 S に沿って一つのベクトル $\boldsymbol{A}$ が与えられているとき，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{n}$ との内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ を考えれば，これは曲面上で定義された一つのスカラー場である．したがって，ベクトル $\boldsymbol{A}$ と面積素片ベクトル $\boldsymbol{n}dS$ との dot product の曲面S に関する面積分（これを，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の曲面Sに関する面積分とよぶ）

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS$$

は，スカラー$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n})$の曲面$S$に関する面積分とも考えられる．今，一般座標系で，$\boldsymbol{n}$ の成分を $n^i(i=1,2,3)$とすれば，

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}dS=\iint_S A_i n^i dS=\iint_S A_i n^i d\xi^j d\eta^k \epsilon_{jkl}\sqrt{g^{ll}} \quad (1.8.61)$$

（ただし，$d\boldsymbol{\xi}, d\boldsymbol{\eta}$ はこの順序で右手系をなす曲面S上の線分素とする）

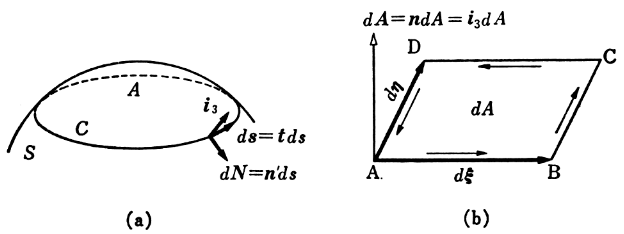
となる．上式でもし $\boldsymbol{A}$ が流速を表す場合には，上の積分は，単位時間内に S を通過する流体の量である．ただし，(1.8.61)式の積分についても，(1.8.60)式について述べたような注意が必要である．

1.8.10　Gauss の発散定理

曲面Sとその上に画かれた座標系 x^α 並びにこの曲面上に画かれ，かつ曲面上の領域Aをとり囲む閉曲線Cを想定する．この閉曲線C上に線素

$$d\boldsymbol{s}=ds^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha$$

を選び，この線素の方向を，領域Aの内部が線素の進む方向に対して，常に左側にあるようにとることができる．《この定義は，曲面の一方の側が常に上面側であると考えてよいことを意味している．このことは明白に成立つことのように思えるけれども，空間内にある実際のものに直面すると，必ずしもそう



第67図　閉曲線Cの線素dsに対する法線ベクトルdN及び面積素片 $dA=d\boldsymbol{\xi}\times d\boldsymbol{\eta}$

ではない．厳密にこの定義の意味を述べるためには，さらに追加的な説明を要するが，ここでは省略することにする．》線素 $d\boldsymbol{s}$ に垂直で曲面 S に接し，かつ $d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{t}ds$（$\boldsymbol{t}$：接線単位ベクトル）と同じ長さを有するベクトルを $d\boldsymbol{N}=\boldsymbol{n}'ds$（$\boldsymbol{n}'$：垂線単位ベクトル）とする．ただし dN の方向は，閉曲線 C の外側に向かう方向とする．さらに曲面 S に垂直で，第67図（a）に示すように，$d\boldsymbol{s}, d\boldsymbol{N}$ に垂直な，第3の単位ベクトルを $\boldsymbol{i}_3$ とする．そうすると，

$$d\boldsymbol{N}=d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{i}_3=ds^\alpha\epsilon_{\alpha 3\beta}\boldsymbol{g}^\beta=dN_\beta\boldsymbol{g}^\beta$$

したがって，

$$dN_\beta=ds^\alpha\epsilon_{\beta\alpha} \tag{1.8.62}$$

さて，曲面 S 上に，ベクトル場 $\boldsymbol{u}=u^\gamma\boldsymbol{g}_\gamma$ がある場合に，曲面上の曲線に沿う次のベクトル積分

$$\oint\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{N}=\oint u^\gamma dN_\gamma$$

について考えてみよう．まず第67図（b）に示すように，微小平行四辺形ABCDの周辺に沿って，小さな矢印で示した方向に，反時計回りに上の積分を実行することを考えてみる．平行四辺形の各辺上で，各辺の一端におけるベクトル $\boldsymbol{u}$ の値を，その辺上の $\boldsymbol{u}$ の代表値とすると，(1.8.62)式から，

$$\begin{aligned}\oint u^\gamma dN_\gamma&=u^\gamma d\xi^\alpha\epsilon_{\gamma\alpha}+(u^\gamma+u^\gamma|_\beta d\xi^\beta)d\eta^\alpha\epsilon_{\gamma\alpha}-(u^\gamma+u^\gamma|_\beta d\eta^\beta)d\xi^\alpha\epsilon_{\gamma\alpha}-u^\gamma d\eta^\alpha\epsilon_{\gamma\alpha}\\&=u^\gamma|_\beta\epsilon_{\gamma\alpha}(d\xi^\beta d\eta^\alpha-d\xi^\alpha d\eta^\beta)\end{aligned}$$

上式の dummy indices を変更して，(1.4.31 a)式及び(1.4.31 b′)式を適用すると，

$$\begin{aligned}\oint u^\gamma dN_\gamma&=(u^\gamma|_\alpha\epsilon_{\gamma\beta}-u^\gamma|_\beta\epsilon_{\gamma\alpha})d\xi^\alpha d\eta^\beta\\&=u^\gamma|_\delta\epsilon_{\gamma\zeta}(\delta^\delta_\alpha\delta^\zeta_\beta-\delta^\delta_\beta\delta^\zeta_\alpha)d\xi^\alpha d\eta^\beta\\&=u^\gamma|_\delta\epsilon_{\gamma\zeta}\epsilon^{\delta\zeta}\epsilon_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\eta^\beta\\&=u^\gamma|_\delta\delta^\delta_\gamma\epsilon_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\eta^\beta\\&=u^\gamma|_\gamma\epsilon_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\eta^\beta\end{aligned} \tag{1.8.63}$$

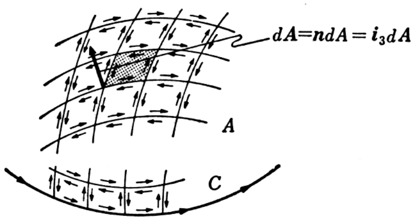
を得る．$\boldsymbol{g}^\alpha$ 及び $\boldsymbol{i}_3$ を基底ベクトルとする座標系では，平行四辺形 ABCD の面積は $d\boldsymbol{A}=dA_3\boldsymbol{i}^3$ なるベクトルで表され，それ以外に成分をもたないから，$dA_3=dA$ と書いてよい．そうすると，

$$dA=d\xi^\alpha d\eta^\beta\epsilon_{\alpha\beta}$$

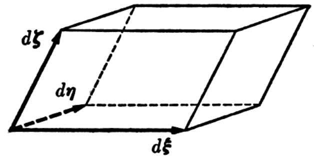
したがって，

$$\oint u^\gamma dN_\gamma=u^\gamma|_\gamma dA$$

第68図に示すように，閉曲線 C によって囲まれた領域 A を，上述のような微小平行四辺形の集りで蔽いつくすようにして，微小四辺形の周辺での積分の和をとると，すべての内部要素の $d\boldsymbol{\xi}$ 及び $d\boldsymbol{\eta}$ による寄与は，隣接微小四辺形で2回ずつ反対符号で現れるから．互いに打消し合い，領域 A を取り囲む閉曲線



第68図　面積要素及び閉曲線 C



第69図　体積素片

C 上にある線素からの寄与だけが残されることとなる．すなわち，それらの和は閉曲線 C を一周する $u^r dN_r$ の積分となり，それはすべての面積素片での $u^r|_r dA$ の総和に等しいことがわかる．

すなわち，
$$\iint_A u^r|_r \epsilon_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\eta^\beta = \oint_C u^r dN_r = \oint_C u^r n_r' ds \qquad (1.8.64)$$

ただし，$\boldsymbol{n}'$：ベクトル $d\boldsymbol{N}$ の方向の単位ベクトル，

ds：ベクトル $d\boldsymbol{s}$ の絶対値(ベクトル $d\boldsymbol{N}$ の絶対値)

上式(1.8.64)式は次のように書き表すこともできる．

$$\iint_A \operatorname{div} \boldsymbol{u} dA = \iint_A \nabla\cdot\boldsymbol{u}\cdot dA = \oint_C \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}' ds \qquad (1.8.65)$$

同様な関係式を，三次元のベクトル場 $\boldsymbol{u}=u^l\boldsymbol{g}_l$ について誘導することもできる．第 69 図に示すように，稜辺 $d\xi^i\boldsymbol{g}_i, d\eta^j\boldsymbol{g}_j$ 及び $d\zeta^k\boldsymbol{g}_k$ を有する微小体積素片を選び，次の面積積分を考える．

$$\iint_S \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{A} = \iint_S u^l dA_l$$

ただし，微小体積素片の六つの側面の一側面を表すベクトル $dA_l\boldsymbol{g}^l$ は，体積素片の外方に向かう法線方向をもつものとする．そうすると，右側面では $dA_l = d\eta^j d\zeta^k \epsilon_{jkl}$ であり，また左側面では，反対符号の同じ式が得られる．ベクトル $\boldsymbol{u}$ の成分の対応値は，左側面では u^l で，右側面では $u^l+u^l|_i d\xi^i$ である．したがって，これらの二つの側面による寄与の和は，

$$u^l(-dA_l)+(u^l+u^l|_i d\xi^i)dA_l = u^l|_i d\xi^i dA_l = u^l|_i d\xi^i d\eta^j d\zeta^k \epsilon_{jkl}$$

(1.4.25)式及び(1.4.23)式を，上式に次々に適用して，

$$\begin{aligned}
u^l|_i \epsilon_{ljk} &= u^l|_m \delta_i^m \epsilon_{ljk} = \frac{1}{2} u^l|_m \epsilon^{mpq} \epsilon_{ipq} \epsilon_{ljk} \\
&= \frac{1}{2} u^l|_m \epsilon_{ipq} (\delta_l^m \delta_j^p \delta_k^q - \delta_l^m \delta_k^p \delta_j^q + \delta_k^m \delta_l^p \delta_j^q - \delta_k^m \delta_j^p \delta_l^q \\
&\quad + \delta_j^m \delta_k^p \delta_l^q - \delta_j^m \delta_l^p \delta_k^q) \\
&= \frac{1}{2} [u^l|_l (\epsilon_{ijk} - \epsilon_{ikj}) + u^l|_k (\epsilon_{ilj} - \epsilon_{ijl}) + u^l|_j (\epsilon_{ikl} - \epsilon_{ilk})]
\end{aligned}$$

$$=u^l|_l\epsilon_{ijk}-u^l|_k\epsilon_{ijl}-u^l|_j\epsilon_{ilk}$$

を得る．体積素片の他の2対の側面による寄与は，free indices i, j, k を循環的に使用して得られるから，体積素片についてのそれらの総計は，

$$\iint u^l dA_l=(u^l|_l\epsilon_{ijk}-u^l|_k\epsilon_{ijl}-u^l|_j\epsilon_{ilk}+u^l|_l\epsilon_{jki}-u^l|_i\epsilon_{jkl}-u^l|_k\epsilon_{jli}$$
$$+u^l|_l\epsilon_{kij}-u^l|_j\epsilon_{kli}-u^l|_i\epsilon_{klj})\cdot d\xi^i d\eta^j d\zeta^k$$
$$=(3u^l|_l\epsilon_{ijk}-2u^l|_i\epsilon_{ljk}-2u^l|_j\epsilon_{ilk}-2u^l|_k\epsilon_{ijl})d\xi^i d\eta^j d\zeta^k \tag{1.8.66}$$

上式の第2項，第3項，及び第4項で，l についての summation convention は，実はそれぞれ，たかだか唯の1項だけである．なぜならば index l は ϵ における他の二つの indices と異なっていなければ，その項は脱落するだけであるからである．そこで，i, j, k の連繋について，二つの典型的な場合を考えてみよう．まず第1の場合は，三つの indices が相異なる場合，たとえば $i, j, k=1, 2, 3$ の場合である．この場合には，

$$(\quad)=3u^l|_l\epsilon_{123}-2u^1|_1\epsilon_{123}-2u^2|_2\epsilon_{123}-2u^3|_3\epsilon_{123}=n^l|_l\epsilon_{123}$$

である．第2の場合は，i, j, k のいずれか二つが相等しい場合，たとえば $i, j, k=2, 2, 3$ の場合である．この場合には，

$$(\quad)=0-2u^1|_2\epsilon_{123}-2u^1|_2\epsilon_{213}-0=0$$

したがって，(1.8.66)式の丸括弧の中の式は，$i\neq j\neq k\neq i$ なるときに限り，0 でなく，その値は $u^l|_l\epsilon_{ijk}$ に等しいことがわかる．ゆえに一つの体積素片について，

$$\iint u^l dA_l=u^l|_l\epsilon_{ijk}d\xi^i d\eta^j d\zeta^k=\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\cdot dV \tag{1.8.67}$$

なる式が成立する．このような体積素片を多数集めて，有限な体積領域 V をうめつくすと，二つの隣接体積素片の共通な側面による寄与は，上式の左辺の積分で互いに打消し合うから，全体積領域 V の表面積 S についての積分だけが残される結果となる．したがって，(1.8.67)式から，次の関係式が得られる．

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\cdot dV=\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{u}dV=\iiint_V u^l|_l\epsilon_{ijk}d\xi^i d\eta^j d\zeta^k$$
$$=\iint_S u^l dA_l=\iint_S \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{A}=\iint_S \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA$$
$$=\iint_S u^k\epsilon_{ijk}d\xi^i d\eta^j \tag{1.8.68}$$

ただし，$\boldsymbol{n}$：閉曲面 S の外方に向かう単位法線ベクトル，

dA：微小面積素片 $d\boldsymbol{A}$ の絶対値(ベクトル $d\boldsymbol{A}$ の方向は

$\boldsymbol{n}$ と同じ)

(1.8.68)式の最後の項の積分については，その一つ手前の項に示されているように，閉曲面Sを一巡するように，かつ積分記号内部の符号が，ベクトル$\boldsymbol{u}$と外方法線ベクトル$\boldsymbol{n}$とのdot productの符号となるようにして，積分を実施しなければならぬことに注意する必要がある．

(1.8.65)式及び(1.8.68)式は，それぞれ“Gaussの発散定理”とよばれるものの二次元形式及び三次元形式である．このGaussの発散定理の物理的意義を述べれば次のようである．

或る閉曲面S上での流体の流速を$\bar{\boldsymbol{v}}$，流体の密度をρとして$\rho\bar{\boldsymbol{v}}$なるベクトルを，(1.8.68)式の$\boldsymbol{u}$としてとると，$\rho\bar{\boldsymbol{v}}$と$d\boldsymbol{A}$とのスカラー積を，閉曲面Sについて面積積分した量$\iint_S \rho\bar{\boldsymbol{v}}\cdot d\boldsymbol{A}$は，閉曲面$S$の全表面を通して，単位時間内に流れ出る流体の質量を表す．一方，流体内の任意点における単位体積から単位時間内に発散する流体の質量は，$\mathrm{div}\,\rho\bar{\boldsymbol{v}}$で与えられるから，閉曲面$S$で囲まれた領域$V$全体から発散する流体の質量は，$\iiint_V \mathrm{div}\,\rho\bar{\boldsymbol{v}}\cdot dV$である．ところがこれはもちろん閉曲面$S$を通して流れ出るわけであるから，さきの$\iint_S \rho\bar{\boldsymbol{v}}\cdot d\boldsymbol{A}$に等しくなければならない．すなわち，

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\rho\bar{\boldsymbol{v}}dV=\iint_S \rho\bar{\boldsymbol{v}}\cdot d\boldsymbol{A}$$

であることは，ほとんど数学的証明をまつまでもなく，直感的にも納得できる事柄である．

次にきわめて小さい立方体dvについては，(1.8.67)式から，

$$\iint_{S'} \boldsymbol{u}d\boldsymbol{A}=\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\cdot dv$$

が成立するから，このような立方体の中心における$\boldsymbol{u}$の発散を

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{A} \qquad (1.8.69)$$

（ただし，S'は微小立方体δvの表面を示すものとする）

のように定義することもできる．そしてこの式から，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$が座標軸の選び方には無関係であることもわかる．

さらにデカルト座標系の空間に，一つのスカラー関数$\phi(x,y,z)$が与えられている場合には，Gaussの発散定理の特別な場合として，次式が成立する．

$$\iiint_V \frac{\partial\phi}{\partial z}dxdydz=\iint_S \phi dxdy \qquad (1.8.70)$$

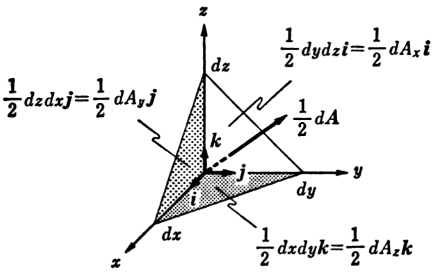
ただし，Sは，体積Vのxy平面への投影平面積ではなく，体積Vを包む閉曲面積全体を指すものとする

何となれば，スカラーϕを，z方向のみの成分を有し，他の座標軸方向の成分

は0であるような，ベクトル$\boldsymbol{u}$の特別な場合と考えれば，上記(1.8.70)式の左辺は，(1.8.68)式の左辺と同一である．また(1.8.70)式の右辺は，ベクトル$\boldsymbol{u}$の特別な場合としてのϕと，z方向の単位ベクトル$\boldsymbol{n}$との dot product ϕと，z方向に垂直な実平面積$dA=dxdy$との積の，閉曲面Sに関する積分であるから，これまた(1.8.68)式の右辺と同一である．したがって(1.8.70)式は，(1.8.68)式の特別な場合にすぎないからである．(1.8.70)式と同様にして，次式も成立する．

$$\iiint_V \frac{\partial\phi}{\partial x}dxdydz=\iint_S \phi dydz \qquad (1.8.70')$$

$$\iiint_V \frac{\partial\phi}{\partial y}dxdydz=\iint_S \phi dxdz \qquad (1.8.70'')$$



第70図　デカルト座標系における微小面積素片dA

したがって，
$$\begin{aligned}\iiint_V \nabla\phi\cdot dV&=\iiint_V\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dxdydz\\
&=\iint_S(\phi dydz\cdot\boldsymbol{i}+\phi dzdx\cdot\boldsymbol{j}+\phi dxdy\cdot\boldsymbol{k})\\
&=\iint_S\phi(dA_x\boldsymbol{i}+dA_y\boldsymbol{j}+dA_z\boldsymbol{k})\\
&=\iint_S\phi\cdot d\boldsymbol{A}=\iint_S\phi\cdot\boldsymbol{n}\cdot dA \qquad (1.8.71)\end{aligned}$$

なる関係式を得る．(1.8.71)式はデカルト座標系を用いて証明したが，テンソル式であるから，すべての座標系を通じて成立することは明らかである．

上式，(1.8.71)式でとくに$\phi=1$とすれば，

$$\iint_S \boldsymbol{n}\cdot dA=0 \qquad (1.8.72)$$

を得る．

またさらに，(1.8.70'')式において，$\phi=u_z$，(1.8.70)式において$\phi=u_y$とおけば，

$$\iiint_V \frac{\partial u_z}{\partial y} dxdydz = \iint_S u_z dxdz, \qquad \iiint_V \frac{\partial u_y}{\partial z} dxdydz = \iint_S u_y dxdy$$

したがって，$\displaystyle\iiint_V \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S (u_z dxdz - u_y dxdy)$

同様に，$\displaystyle\iiint_V \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) dxdydz = \iint_S (u_x dxdy - u_z dydz)$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) dxdydz = \iint_S (u_y dydz - u_x dzdx)$$

ゆえに，これらを纏めて次のように書くことができる.

$$\begin{aligned}
\iiint_V \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot dV &= \iiint_V \nabla \times \boldsymbol{u} dV \\
&= \iiint_V \left\{\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right\} dV \\
&= \iint_S \{(u_z dA_y - u_y dA_z)\boldsymbol{i} + (u_x dA_z - u_z dA_x)\boldsymbol{j} \\
&\quad + (u_y dA_x - u_x dA_y)\boldsymbol{k}\} \\
&= \iint_S d\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{u} = \iint_S (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}) dA \qquad (1.8.73)
\end{aligned}$$

上式(1.8.73)式もまた，デカルト座標系を用いて証明したが，テンソル式であるから，すべての座標系を通じて成立する.

なお，(1.8.68)式で，特に $\boldsymbol{u} = -\nabla\phi$ のときには，

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = -\nabla^2\phi, \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = -\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n} = -\mathrm{grad}\, \phi \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$$

であるから，(1.8.68)式から，

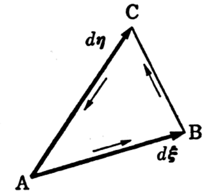
$$\iiint_V \nabla^2\phi \cdot dV = \iint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \cdot dA \qquad (1.8.74)$$

なる式が成立することがわかる.

1.8.11　Stokes の定理

ベクトル場 $\boldsymbol{u} = u_i \boldsymbol{g}^i$ に第71図に示すような微小三角形要素片があるとする．この微小三角形要素片は次のような，面積ベクトルで表される.

$$d\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} d\boldsymbol{\xi} \times d\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} d\xi^i d\eta^j \epsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^k$$



第71図　微小三角形要素片

三角形周辺 ABCA を反時計回りに辿って，積分，$\oint u_i ds^i$ の値を算定することについて考えてみよ

う．第 71 図に示した小さな矢印の方向に三角形周辺を辿ると，ds^i は，順次 $d\xi^i, d\eta^i - d\xi^i$ 及び $-d\eta^i$ と同じである．これらの各周辺上での u_i の値として，両端での u_i の平均値を用いることにすれば，

$$\oint u_i ds^i = \left(u_i + \frac{1}{2}u_i|_j d\xi^j\right)d\xi^i + \left\{u_i + \frac{1}{2}u_i|_j(d\xi^j + d\eta^j)\right\}(d\eta^i - d\xi^i)$$

$$+\left(u_i + \frac{1}{2}u_i|_j d\eta^j\right)(-d\eta^i)$$

$$= \frac{1}{2}u_i|_j(d\xi^j d\eta^i - d\xi^i d\eta^j) = u_i|_j(\delta^j_m\delta^i_n - \delta^j_n\delta^i_m)\frac{1}{2}d\xi^m d\eta^n$$

上式の最後の式に，(1.4.24)式を適用すると，次の結果が得られる．

$$\oint u_i ds^i = u_i|_j \epsilon^{jik}\epsilon_{mnk}\cdot\frac{1}{2}d\xi^m d\eta^n$$

$$= (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})^k \epsilon_{mnk}\frac{1}{2}d\xi^m d\eta^n$$

《ただし，$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})^k$ は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ の k-成分を示す》

$$= (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})^k dA_k$$

$$= (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\cdot d\boldsymbol{A}$$

さて平面または曲面 S 上にある閉曲線 C によって囲まれた任意の曲面領域 A は，上に考えたような微小三角形素片で蔽いつくすことができるが，これらの微小三角形周辺上での $u_i ds^i$ の積分の総和を考えると，領域 A の内部にある境界辺上からの寄与は，互いに打消し合うから，閉曲線 C 上での積分だけが残される結果となる．したがって，この結果得られる上式左辺の積分の値は，上式の右辺を全領域 A にわたって積分した値に等しいこととなる．すなわち，

$$\oint_C u_i ds^i = \frac{1}{2}\epsilon^{jik}\epsilon_{mnk}\iint_A u_i|_j d\xi^m d\eta^n \tag{1.8.75}$$

$$= \iint_A (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\cdot d\boldsymbol{A} = \iint_A (\nabla\times\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}dA \tag{1.8.75$'$}$$

上式は，"Stokesの定理" とよばれ，また左辺の積分は，閉曲線 C に沿ってのベクトル $\boldsymbol{u}$ の"circulation"とよばれる．(1.8.75)式では，二つの交代テンソル成分を積分記号の前に引き出してあるが，これは領域 A の中で，各交代テンソル成分の値は，場所毎に異なるけれども，$\epsilon^{jik}\epsilon_{mnk} = e^{jik}e_{mnk} = \pm 1$ or 0，であって，それらの積の値は場所に関係なく常に一定であるからである．

さきに，第 1.8.5 節 7) 項において "$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$ が常に成立するときには，$\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\,\phi$ のようなスカラー関数 ϕ が存在する" という定理の証明を，一時おあずけにしておいたが，今ここでこれを証明する．

一定点Oと，任意の点Pを空間中に選び，この2点を，任意の二つの曲線，OQP 及び ORP で結ぶ．そうすると OQPRO は一つの閉曲線を形成するか

ら，rot $\boldsymbol{u}$ が常に 0 ならば，Stokes の定理(1.8.75′)式において，その右辺は 0 に等しい．したがって，

$$\oint_{\mathrm{OQPRO}} u_i ds^i = 0$$

$$\therefore \quad \int_{\mathrm{OQP}} u_i ds^i = \int_{\mathrm{ORP}} u_i ds^i$$

ゆえに $\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{u} d\boldsymbol{s}$ の値は，P点の位置が定まれば，定点OからP点に至る経路には無関係に一義的に定まることがわかる．すなわち，積分経路に無関係に，

$$\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{P}} u_i ds^i = \phi(\mathrm{P}) - \phi(\mathrm{O})$$

なる式が成立する．よって，さきに述べた第1.8.8節の定理によって，$\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\,\phi$ なるスカラー関数 ϕ が存在しなければならない．（証明終）

次に，Stokes の定理の特別な場合として，デカルト座標系でスカラー関数 $\phi(x, y, z)$ を，x 方向の成分のみを有し，他の 2 方向の成分が 0 であるようなベクトル $\boldsymbol{u}$ の代りに用いると，次式が得られる．

$$\oint_C \phi dx = \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} dz dx - \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy \right) \qquad (1.8.76)$$

同様にして，

$$\oint_C \phi dy = \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy - \frac{\partial \phi}{\partial z} dy dz \right) \qquad (1.8.76')$$

$$\oint_C \phi dz = \iint_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} dy dz - \frac{\partial \phi}{\partial x} dz dx \right) \qquad (1.8.76'')$$

が得られる．

1.8.12 Stokes の定理の応用

1) Stokes の定理で，もし $\boldsymbol{u} = -\mathbf{grad}\,\phi$ であれば，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0 \qquad 《第1.8.5節 4)項による》$$

$$\therefore \quad \oint_C \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} ds = \oint_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_A (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} dA = 0 \quad (1.8.77)$$

ただし，$\boldsymbol{t}$：閉曲線 C の接線方向の単位ベクトル，　ds：閉曲線 C の線素の絶対値，$\boldsymbol{n}$：微小面積素片 $d\boldsymbol{A}$ の法線方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{r}$：閉曲線 C 上の点の位置ベクトル

2)　(1.8.76)式～(1.8.76″) 式をまとめて書けば，次のように表すことができる．

$$\oint_C \phi \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_A \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} dA_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} dA_z \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dA_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} dA_x \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} dA_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} dA_y \right) \boldsymbol{k} \right\}$$

$$=\iint_A \boldsymbol{n}\times\nabla\phi\cdot dA \tag{1.8.78}$$

ただし，ϕ は，任意のスカラー関数とする

3)　(1.8.76′)式の ϕ に z，(1.8.76″)式の ϕ に y を代入して，後者から前者を引けば，

$$\oint_C (ydz-zdy)=2\iint_A dydz$$

同様に，

$$\oint_C (zdx-xdz)=2\iint_A dzdx$$

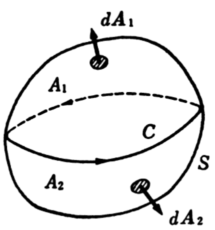
$$\oint_C (xdy-ydx)=2\iint_A dxdy$$

ゆえに，以上の三つの式をまとめて，次式が得られる．

$$\oint_C \boldsymbol{r}\times d\boldsymbol{r}=2\iint_A \boldsymbol{n}\cdot dA \tag{1.8.79}$$

4)　さきにわれわれは，第 1.8.5 節5) 項において，$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})=0$ という等式が恒等的に成立することを微分演算子 ∇ を使う形式的な計算によって証明したが，この恒等式を Stokes の定理を使って導き出してみる．

任意の閉曲面を S とし，その上に横たわる任意の単一閉曲線を C とする．C によって 2 分された S の部分を A_1 及び A_2；その面積素片をベクトルで表したものをそれぞれ $d\boldsymbol{A}_1, d\boldsymbol{A}_2$ とする (第 72 図)．



第72図　div(rot $\boldsymbol{u}$)=0の証明

任意の連続なベクトル関数を $\boldsymbol{u}(x^1, x^2, x^3)$ とし，A_1 を左手に見ながら C を回る向きに取った曲線 C の線素ベクトルを $d\boldsymbol{r}$ とすると，Stokes の定理(1.8.75′)式により，

$$\oint_C \boldsymbol{u}d\boldsymbol{r}=\iint_{A_1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})d\boldsymbol{A}_1, \qquad \oint_C \boldsymbol{u}d\boldsymbol{r}=\iint_{A_2}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})d\boldsymbol{A}_2$$

しかるに，

$$\oint_C \boldsymbol{u}d\boldsymbol{r}+\oint_C \boldsymbol{u}d\boldsymbol{r}=0$$

$$\therefore\quad \iint_{A_1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})d\boldsymbol{A}_1+\iint_{A_2}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})d\boldsymbol{A}_2=0$$

を得るが，$A_1+A_2=S$ であるから，上式はまた，

$$\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})d\boldsymbol{A}=0 \tag{1.8.80}$$

と書くことができる．閉曲面 S で囲まれた領域 V の中の体積素片を dV とすると，Gauss の発散定理によって，一般に，任意のベクトル $\boldsymbol{W}$ について，

$$\iint_S \boldsymbol{W}\cdot d\boldsymbol{A}=\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{W}\cdot dV$$

であるが，$\boldsymbol{W}$ として，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ をとると，(1.8.80)式によって，
$\iint_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})d\boldsymbol{A}=0$　であるから，

$$\iiint_V \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})dV=0$$

となる．しかるに閉曲面S及びそれによって囲まれた領域Vは全く任意なものであるから，結局　$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})=0$　がいたるところで恒等的に成立たなければならないことがわかる．

1.8.13　Stokesの定理の逆定理

今，任意の閉曲線Cと，それの囲む任意の曲面領域Aに対して，

$$\oint_C \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}ds\left(=\oint_C \boldsymbol{u}d\boldsymbol{r}\right)=\iint_A \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}dA$$

が，常に成立つことを仮定する．

Stokesの定理によって，

$$\oint_C \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}ds=\iint_A (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}dA$$

であるから，これと仮定とから，

$$\iint_C (\boldsymbol{W}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}dA=0$$

が成立しなければならない．ところが，曲面領域Aは任意の曲面上の任意の領域であるから，常に，

$$(\boldsymbol{W}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}=0$$

であるが，$\boldsymbol{n}$ もまた任意であるから，ベクトル ($\boldsymbol{W}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$) と直交しなくてもよい．したがって，すべての点において $\boldsymbol{W}-\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=0$，すなわち $\boldsymbol{W}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ である．

したがって，次の定理が成立つ．

“任意の閉曲線Cと，それの囲む任意の曲面領域Aに対して，

$$\oint_C \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t}ds=\iint_A \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n}dA$$

が常に成立つならば，ベクトル $\boldsymbol{W}$ は，実は，

$$\boldsymbol{W}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$$

である”．

1.8.14　勾配，発散，回転間の諸関係式

任意の小さい閉曲面を S' とし，それによって囲まれた領域の体積を δv とする．S' の面積素片をベクトルで表したものを $d\boldsymbol{A}$ とし，それに立てた外向きの法線方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると，$d\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}dA$ であるが，ϕ 及び $\boldsymbol{u}$ をそれぞれスカラー関数及びベクトル関数とするとき，まず(1.8.71)式から，

$$\nabla\phi=\text{grad}\,\phi=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}\phi\cdot\boldsymbol{n}dA \tag{1.8.81}$$

ただし，$\phi=\text{const.}$ なるときは，(1.8.72)式から，上式の右辺は 0 に等しい．しかしこのことは，上式の左辺から明らかなことである．

また，(1.8.69)式ですでに述べたように，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\text{div}\,\boldsymbol{u}=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}dA \tag{1.8.82}$$

さらに，(1.8.73)式から，

$$\nabla\times\boldsymbol{u}=\text{rot}\,\boldsymbol{u}=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u})dA \tag{1.8.83}$$

のような諸関係式が成立つ．

上記(1.8.81)式～(1.8.83)式を用いると，いろいろな重要公式を，次のように興味深く誘導することができる．

1)　$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{u})=\phi\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi$ (1.8.84)

証明　上式(1.8.84)式は，(1.8.28)式の特別な場合として，

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{u})=(\phi\nabla)\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\phi+\underbrace{\phi\times(\nabla\times\boldsymbol{u})}_{=0}+\underbrace{\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\phi)}_{=0}$$

$$=\phi\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\phi$$

のように得られるが，次のようにしても，これを証明することができる．すなわち，(1.8.82)式によって，

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{u})=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}\phi\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{A}$$

$$=\phi_0\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}\boldsymbol{u}d\boldsymbol{A}+\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}d\phi\boldsymbol{u}d\boldsymbol{A}$$

$$=\phi\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}_0\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}d\phi d\boldsymbol{A}+\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}d\phi d\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{A}$$

上式の第 2 項及び第 3 項は共に高次の微小量(無限小)のように見えるが，実は第 2 項だけはそうではない．何となれば第 2 項に(1.8.72)式から 0 に等しいことがわかっている次の量，

$$\boldsymbol{u}_0\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}\phi_0 d\boldsymbol{A}$$

を加えてもよいから，結局，第 2 項は，(1.8.81)式から，次の値と同じ大きさ

の値であるからである．

すなわち，
$$\boldsymbol{u}_0 \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} \phi d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi$$

したがって，
$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{u}) = \phi \nabla \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \phi \quad \text{(証明終)}$$

2)　$\nabla \times (\phi \boldsymbol{u}) = \phi \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \times \nabla \phi$　(1.8.85)

証明　(1.8.83)式によって，

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\phi \boldsymbol{u}) &= \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} d\boldsymbol{A} \times (\phi \boldsymbol{u}) \\
&= \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} \phi (d\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{u}) \\
&= \phi_0 \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} d\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{u} + \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} d\phi \cdot (d\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{u}) \\
&\fallingdotseq \phi \nabla \times \boldsymbol{u} - \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} d\phi (\boldsymbol{u}_0 \times d\boldsymbol{A}) \\
&= \phi \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0 \times \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} d\phi \cdot d\boldsymbol{A} \\
&= \phi \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0 \times \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} \phi d\boldsymbol{A} \quad \left(\because \iint_{S'} \phi_0 d\boldsymbol{A} = 0 \right) \\
&= \phi \nabla \times \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \times \nabla \phi \quad \text{(証明終)}
\end{aligned}$$

3)　$(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\nabla \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{W}$　(1.8.86)

証明　微分演算子 ∇ を用いて，直接，

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{W} = (\nabla \boldsymbol{u}) \boldsymbol{W}_0 + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_0) \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}(\nabla \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{W}$$

であることが証明される．(証明終)　上式右辺の最後の項は，デカルト座標系で表せば，次のことを意味していることに注意する必要がある．

$$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{W} = \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (W_x \boldsymbol{i} + W_y \boldsymbol{j} + W_z \boldsymbol{k})$$

上式の左辺に，ϕ の特別な場合($\phi = W_x$ or W_y or W_z)として，(1.8.81)式を適用すると，次のような物理式が得られる．

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{W} &= \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} \{ (\boldsymbol{u}_0 W_x d\boldsymbol{A}) \boldsymbol{i} + (\boldsymbol{u}_0 W_y d\boldsymbol{A}) \boldsymbol{j} + (\boldsymbol{u}_0 W_z d\boldsymbol{A}) \boldsymbol{k} \} \\
&= \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} (\boldsymbol{u}_0 d\boldsymbol{A}) \boldsymbol{W}
\end{aligned}$$

4)　$(\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{W} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} (\boldsymbol{u}_0 d\boldsymbol{A}) \boldsymbol{W} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} \boldsymbol{W} (\boldsymbol{u}_0 d\boldsymbol{A})$　(1.8.87)

$(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{W} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} (\boldsymbol{u} d\boldsymbol{A}) \boldsymbol{W} = \lim_{\delta v \to 0} \frac{1}{\delta v} \iint_{S'} \boldsymbol{W} (\boldsymbol{u} d\boldsymbol{A})$　(1.8.88)

証明　上の第1式(1.8.87)式は，既に前項の末尾で証明したものである．第2式(1.8.88)式は，(1.8.82)式及び前項の結果を利用して，

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}_0\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}\boldsymbol{u}d\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{W}$$

$$=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\left\{\iint_{S'}(\boldsymbol{u}d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}_0+\iint_{S'}(\boldsymbol{u}_0d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}\right\}$$

$$=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\left\{\underbrace{\iint_{S'}(\boldsymbol{u}_0d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}_0}_{=0}+\iint_{S'}(d\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}_0\right.$$

$$\left.+\iint_{S'}(\boldsymbol{u}_0d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}\right\}$$

$$=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\left\{\iint_{S'}(d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}_0+\iint_{S'}(\boldsymbol{u}_0d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}\right\}$$

上式に無限小の値 $\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}(d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{A})d\boldsymbol{W}$ を加えると，

$$\text{上式}=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\left\{\iint_{S'}(d\boldsymbol{u}d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}+\iint_{S'}(\boldsymbol{u}_0d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}\right\}$$

$$=\lim_{\delta v\to 0}\frac{1}{\delta v}\iint_{S'}(\boldsymbol{u}d\boldsymbol{A})\boldsymbol{W}$$

なる結果が得られる．（証明終）

1.8.15 Green の定理

閉曲面 S で囲まれた領域を V とし，スカラー場 $f(x^1,x^2,x^3)$, $g(x^1,x^2,x^3)$ が与えられているとすれば，

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dA=\iiint_V(f\nabla^2g+(\nabla f)\cdot(\nabla g))dV \qquad (1.8.89)$$

が成立する．ただし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は S の内部から外部へ向かう方向をとるものとする．上記(1.8.89)式をGreenの定理という．その証明は次の通りである．

今，$f\nabla g$ というベクトルの div を考えれば，前節 1) 項から，

$$\mathrm{div}(f\nabla g)=f\nabla^2g+(\nabla f)\cdot(\nabla g)$$

したがって，

$$\iiint_V\mathrm{div}(f\nabla g)dV=\iiint_V(f\nabla^2g+(\nabla f)\cdot(\nabla g))dV$$

他方，Gauss の発散定理によって，

$$\iiint_V\mathrm{div}(f\nabla g)dV=\iint_S(f\nabla g)d\boldsymbol{A}=\iint_S f\boldsymbol{n}(\nabla g)dA=\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dA$$

である．これで Green の定理は証明された．

(1.8.89)式の特別な場合として，$g(x,y,z)=x+a$ とすれば，

$$\nabla g=1\boldsymbol{i},\qquad \nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\nabla^2 g=0$$

ゆえに，この場合は，

$$\iiint_V (f\nabla^2 g+(\nabla f)\cdot(\nabla g))\,dV=\iiint_V \frac{\partial f}{\partial x}dV$$

また，

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dA=\iint_S f\boldsymbol{n}(1\boldsymbol{i})\,dA=\iint_S f\cdot\cos(\widehat{n,x})\,dA$$

$$\therefore\quad \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x}dV=\iint_S f\cdot\cos(\widehat{n,x})\,dA=\iint_S f\,dA_x \qquad (1.8.90)$$

次に，(1.8.89)式の f と g とを交換して，辺々差引けば，

$$\iint_S\left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dA=\iiint_V (f\nabla^2 g-g\nabla^2 f)\,dV \qquad (1.8.91)$$

を得る．この(1.8.91)式も **Green の定理**とよばれている．

(1.8.89)式において，もし $f=g$ とおけば，

$$\iint_S f\frac{\partial f}{\partial n}dA=\iiint_A (f\nabla^2 f+(\nabla f)^2)\,dV \qquad (1.8.92)$$

を得る．さらにまた，**(1.8.89)式において，もし g が調和関数ならば**，$\nabla^2 g=0$ であるから，

$$\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}dA=\iiint_V (\nabla f)\cdot(\nabla g)\,dV \qquad (1.8.93)$$

を得る．**(1.8.91)式において，もし f と g が，共に調和関数ならば，**

$$\iint_S\left(f\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial f}{\partial n}\right)dA=0 \qquad (1.8.94)$$

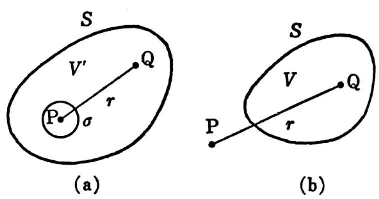
を得る．**(1.8.92)式において，特に f が調和関数ならば，**

$$\iint_S f\frac{\partial f}{\partial n}dA=\iiint_V (\nabla f)^2 dV$$

を得る．

1.8.16 Green の公式

前節で述べた(1.8.91)式において $f=1/r$ とすると，一つの重要な結果が得られる．ただし r は，一定点Pから，領域 V 内の任意の動点Qに至る距離である．



第73図　Greenの公式における定点Pと動点Qとの関係

Pが体積積分の領域 V の中にある場合（第73図（a））と，領域 V の外にある場合（第73図（b））の二つの

場合が区別されるが，まず簡単な第2の場合を考えよう．この場合には，Qがどのように動いても，$r=0$とはならないから，$1/r$は常に有限であり，また$1/r$はLaplace の方程式 $\nabla^2 f=0$ を満足する．すなわち $\nabla^2(1/r)=0$ である《$\because$ $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}$，したがって $\nabla\dfrac{1}{r}=-\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{x}{r}\boldsymbol{i}+\dfrac{y}{r}\boldsymbol{j}+\dfrac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)=-\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，$\nabla^2\dfrac{1}{r}=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\dfrac{1}{r}=\left(\dfrac{3}{r^4}\cdot\dfrac{x^2}{r}-\dfrac{1}{r^3}\right)+\left(\dfrac{3}{r^4}\cdot\dfrac{y^2}{r}-\dfrac{1}{r^3}\right)+\left(\dfrac{3}{r^4}\cdot\dfrac{z^2}{r}-\dfrac{1}{r^3}\right)=\dfrac{3r^2}{r^5}-\dfrac{3}{r^3}=0$》.

したがって，(1.8.91)式から，

$$\iint_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dA-\iiint_V\frac{1}{r}\nabla^2 g\,dV=0 \quad (1.8.95)$$

という関係式が得られる．

ところが，もっと重要なのは，第一の場合，すなわちPが領域Vの中にある場合であって，このときには，QがPに近づいて遂に重なると，$r=0$となり，$1/r$も$\nabla(1/r)$，$\nabla^2(1/r)$も不定になる．したがって，f, gがいずれも有限，確定な連続関数であるという仮定の下に得られた Green の定理(1.8.91)式を，そのまま使うことはできないが，たとえばP点を中心とするきわめて小さい半径εの球面σを画いて，P点の近傍を積分領域Vから除くことにすれば，残りの領域V'に対しては，Green の定理を適用することができる．ただしこのようにしたときは，面積積分は，はじめからVの境界であった閉曲面Sに及ぼされるだけでなく，V'の一つの境界として新しく現れた球面σにも及ぼされなければならない．ゆえに，球面σに立てた(領域V'に対して)外向きの法線の向きは，動径の向きと反対であることを考えると，次式が得られる．

$$\iiint_{V'}\left\{\frac{1}{r}\nabla^2 g-g\nabla^2\frac{1}{r}\right\}dV$$
$$=\iint_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dA-\iint_\sigma\left\{\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial g}{\partial n}+g\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)\right\}d\sigma \quad (\mathrm{a})$$

ここで，$d\sigma$ は球面σの上の面積素片であるが，これが球面中心Pにおいて張る立体角を$d\omega$とすると，$d\sigma=\varepsilon^2 d\omega$であるから，

$$\iint_\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial g}{\partial n}+g\frac{1}{\varepsilon^2}\right)d\sigma=\varepsilon\iint_\sigma\frac{\partial g}{\partial n}d\omega+\iint_\sigma g\,d\omega$$

となる．

$\varepsilon\to 0$ とすると，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\iint_\sigma\frac{\partial g}{\partial n}d\omega=0$$

となり，またPにおけるgの値をg_{P}で表すことにすれば，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_\sigma g\,d\omega=4\pi g_{\mathrm{P}}$$

となるから，結局，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\sigma}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial g}{\partial n}+g\frac{1}{\varepsilon^2}\right)d\sigma=4\pi g_{\mathrm{P}}$$

となる．一方 $\nabla^2(1/r)$ は，領域 V' のすべての点に対して0になるから，上記(a)式の左辺の体積積分は，

$$\iiint_{V'}\frac{1}{r}\nabla^2 g dV$$

となる．$\varepsilon\to 0$ としたとき V' は V に近づくけれども，P点は常に領域外になければならないから，V' の極限値は V であるとはいえない．しかし球面 σ の内部についての体積積分は，

$$\iiint\frac{1}{r}\nabla^2 g dV=\iiint\frac{1}{r}\nabla^2 g\cdot r^2 dr d\omega=\iiint\nabla^2 g\cdot r dr d\omega$$

となり，$\nabla^2 g$ が有限である限り，これは球面 σ の半径 ε が0に近づくと共に0に収束するから，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{V'}\frac{1}{r}\nabla^2 g dV=\iiint_{V}\frac{1}{r}\nabla^2 g dV$$

となる．ゆえに結局，

$$4\pi g_{\mathrm{P}}=\iint_{S}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dA-\iiint_{V}\frac{1}{r}\nabla^2 g dV \quad (1.8.96)$$

という結果が得られることになり，領域 V の中のすべての点において，$\nabla^2 g$ が与えられ，また V を囲む閉曲面 S 上における g 及び $\partial g/\partial n$ が与えられる場合には，P点における g の値 g_{P} はこの式で決められるのである．ただし，P点は距離を測るときの原点となる点である．

したがって，$1/r$ のみでなく，**g もまた Laplace の方程式を満足する場合には，** g_{P} を求める式は，

$$4\pi g_{\mathrm{P}}=\iint_{S}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial n}-g\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dA \quad (1.8.97)$$

となる．(1.8.95)式，(1.8.96)式及び(1.8.97)式を Green の公式とよんでいる．これらの式は，応用上きわめて重要なものである．

以上においては，領域 V が有限な場合について考えたのであるが，領域 V が限りなく広い場合には，**g が無限遠において $1/r$ と同じ程度で0になるならば，** (1.8.96)式における面積積分は0となり，Pにおける g の値 g_{P} は，

$$g_{\mathrm{P}}=-\frac{1}{4\pi}\iiint_{V_\infty}\frac{1}{r}\nabla^2 g dV \quad (1.8.98)$$

で与えられる．ただし，V_∞ は無限に広い領域を表すものとする．

とくに g が Poisson の方程式：

$$\nabla^2 g=-4\pi\rho \quad \textbf{（ただし，}\rho\textbf{ は連続なスカラー関数）} \quad (1.8.99)$$

を満足するような関数であることがわかっている場合には，g_P は，

$$g_P=\iiint_{V_\infty}\frac{\rho}{r}dV \tag{1.8.100}$$

となるが，これは逆に Poisson の方程式の一つの特解を与えることになる．

1.8.17 Helmholtz の定理

われわれは，第1.8.5節8)項において div $\boldsymbol{u}=0$ を恒等的に満足するようなベクトル $\boldsymbol{u}$ は，一つのベクトル関数 $\boldsymbol{A}$ の回転，すなわち rot $\boldsymbol{A}$ として表されることを証明し，また，第1.8.5節7)項において，rot $\boldsymbol{u}=0$ を恒等的に満たすようなベクトル $\boldsymbol{u}$ は，或るスカラー関数 ϕ の勾配，すなわち grad ϕ として表されることを述べた．ベクトル関数場 $\boldsymbol{u}$ の最も典型的な例は，外力の作用によって変形した弾性体内の分子点の変位である．そこで弾性体内の分子点変位関数を脳裡に画きつつ，一般の任意なベクトルはどのような性質をもっているかについて考察してみよう．

弾性体の分子点変位 $\boldsymbol{u}$ を考えると，この変位 $\boldsymbol{u}$ は，問題の分子点を中心にもつ微小立方体素片について，一般に何がしかの div $\boldsymbol{u}$ と rot $\boldsymbol{u}$ をもっているが，この二つの量は，一つの分子点については，互いに独立に存在しうる量である．換言すれば，div $\boldsymbol{u}$ または rot $\boldsymbol{u}$ のいずれか一方を決めても，他の一方はそれに影響されることなく，任意に定めうるものである．このことは，弾性体内の分子点の変位について物理的に考えてみれば，直感的に明らかなことであるが，解析的にも次のように証明できる事柄である．デカルト座標系においては，

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\\
&\left.\begin{aligned}
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})_x=\omega_x=\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})_y=\omega_y=\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\\
(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})_z=\omega_z=\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right\}\text{(b)}
\end{aligned}\right\}\quad\text{(a)}$$

であるから，(rot $\boldsymbol{u}$) の成分 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ を定めただけでも，三つの未知変位成分 u_x, u_y, u_z に対してすでに三つの式が存在するから，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ は，決定せられてしまうようにみえるけれども，実はそうではない．(rot $\boldsymbol{u}$) は，第1.8.5節5)項により，常に，

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u})=0$$

であるから，(rot $\boldsymbol{u}$)の成分 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ は $\frac{\partial\omega_x}{\partial x}+\frac{\partial\omega_y}{\partial y}+\frac{\partial\omega_z}{\partial z}=0$ が常に満足さ

れるように与えられなければならない．そのため，上の(b)式は，実は三つの独立な式ではなく，真に独立な式は二つだけである．したがって，(a)式は実は三つの独立な式にすぎず，任意の一点の変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対しては，一般に $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$ と $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ とを，別々に任意に賦与することができる．また，弾性体が破損することなく変形を行う場合には，その歪テンソル成分相互の間には，適合条件式のような条件式が存在するけれども，このような場合でさえ，二つの隣接分子点の変位成分相互間には，それらの連続性以外には何の制約もない．いわんや，流体粒子の変位に至っては，これはもちろんである．

以上で変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ に対して，一般に $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$ 及び $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ をそれぞれ同時にかつ任意に与えうることがわかったが，(a)式はいずれも微分方程式であるので，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$ 及び $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ を与えられても，変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ が積分常数だけ不定とならないで，一意的に定まるかどうかということが心配になる．これについては次のような定理がある．"単連結領域(領域外に出ることなしに任意の閉曲面を一点に縮めることができるような領域を単連結領域という．今までに考えてきたような一つの閉曲面 S で囲まれた領域 V は，単連結領域である．)V の中のいたるところで，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$ 及び $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ が与えられ，かつ V を囲む閉曲面 S 上で，$\boldsymbol{u}$ の法線成分 u_n が与えられているときには，ベクトル関数 $\boldsymbol{u}$ は唯一通りに決まる".

上記の定理の証明は次の通りである．すなわち，
"与えられた条件を満足する二つの異なるベクトル関数 $\boldsymbol{u}$ 及び $\boldsymbol{u}'$ が存在するものと仮定し，その差を $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'$ とする．そうすると，$\boldsymbol{u}_0$ は領域 V 内のいたるところで　$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_0=0, \mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_0=0$　なる二つの条件を満たし，また，境界 S の上では，$(u_0)_n=0$　を満足する．ところが，第1.8.5節7)項によって，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_0=0$ を満たす $\boldsymbol{u}_0$ は，或るスカラー関数 ϕ の勾配として表される．すなわち，$\boldsymbol{u}_0=\mathrm{grad}\,\phi=\nabla\phi$．ゆえに，上述の条件，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_0=0$ によって，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_0=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi=\nabla^2\phi=0$ という条件を得る．

一般に，スカラー関数 ϕ 及びその第一次導関数，第二次導関数が領域 V の内部及び境界 S の上のいたるところで，有限，連続，一価であれば，(1.8.92)式

$$\iint_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dA=\iiint_V (\phi\nabla^2\phi+(\nabla\phi)^2)dV$$

が成立するが，この式に上に得た条件，

$$\nabla^2\phi=0,\ \text{及び境界}\,S\,\text{上で}\,(u_0)_n\left(=\boldsymbol{n}\,\mathrm{grad}\,\phi=\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)=0$$

を代入すると，

$$\iiint_V (\nabla\phi)^2dV=0$$

という関係式を得る．明らかに $(\nabla\phi)^2 \geqq 0$ であるから，いたるところで，

$$\nabla\phi=0$$

でなければならぬことがわかる．ゆえに結局，

$$\boldsymbol{u}_0=\nabla\phi=0$$

なること，したがって，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'$ となることがわかる．"(証明終)

次に領域 V が限りなく広い場合でも，閉曲面 S 上での $\boldsymbol{u}$ の法線成分 $(u_0)_n=0$ なる条件の代りに，ϕ が無限遠において，$1/r$ と同じ程度で 0 になるならば，上の定理は，無限大領域の場合に対しても適用される．ただし，r は固定原点から，無限遠に遠ざかる点に引いた動径の長さである．

実際，無限遠において，ϕ が $1/r$ と同じ程度で 0 になると，$\partial\phi/\partial n=\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}\,\phi$ 及び $\phi(\partial\phi/\partial n)$ はそれぞれ $1/r^2$ 及び $1/r^3$ の程度で 0 になるから，無限大の閉曲面についての面積積分

$$\iint \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dA=\iint \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}r^2d\omega$$

は 0 になり，結局，

$$\iiint_{V_\infty}(\nabla\phi)^2dV=0$$

となって，いたるところで $\nabla\phi=0$，すなわち $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'$ なることがいえる．

ところで，ϕ が $1/r$ と同じ程度で 0 になるときには，$\boldsymbol{u}_0=\mathrm{grad}\,\phi$ は $1/r^2$ の程度で 0 になるから，このことを考慮に入れると，結局，無限大領域の場合に，次の定理が成立つことになる．

"無限大領域の場合において，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$ 及び $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ の値を，すべての点において与えることができ，かつ無限遠において $\boldsymbol{u}$ が $1/r^2$ の程度で 0 に近づく場合には，ベクトル関数 $\boldsymbol{u}$ は唯一通りに定まる．"

上記のように，二つの定理が成立つことがわかれば，一般のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ は次のようになっていることがわかる．すなわち，一般にベクトル場 $\boldsymbol{u}$ がある場合に，$\boldsymbol{u}$ を二つの部分 $\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ に分けて，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$ とし，かつ，

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1=\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=4\pi\rho\\&\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_1=0\end{aligned}\right\}$$

なるようにすれば，ベクトル $\boldsymbol{u}$ から，ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ を差引いた残余のベクトル $\boldsymbol{u}_2$ は，

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_2=0\\&\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_2=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=4\pi\boldsymbol{I}\end{aligned}\right\}$$

になっていなければならない．この場合，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ 以外に，

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_0=0\\&\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_0=0\end{aligned}\right\}$$

なるベクトル $\boldsymbol{u}_0$ は，上述のように，一般に存在しない．

ところが，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_1=0$ であるから，第1.8.5節7) 項によって，$\boldsymbol{u}_1$ は $\boldsymbol{u}_1=\mathrm{grad}\,\phi$ なるスカラー関数 ϕ によって表され，また $\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_2=0$ であるから，第1.8.5節8) 項によって，$\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{u}_2=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Psi}$ なるベクトル関数 $\boldsymbol{\Psi}$ によって表される．したがって，これらを総合して，“$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}$ 及び $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$ が与えられ，かつ無限遠において $1/r^2$ の程度で0になるようなベクトル $\boldsymbol{u}$ は，常に唯一通りに分解せられ，かつ，

$$\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\,\phi+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Psi}=\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{\Psi} \qquad (1.8.101)$$

として表される”ことがわかる．これを Helmholtz の定理という．

さて，ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ では，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_1=0$ であって，これによって，$\boldsymbol{u}_1=\mathrm{grad}\,\phi$ なるスカラー関数 ϕ が常に存在し，かつ原点における ϕ の値が定まれば一義的に定まることは，第1.8.5節7) 項の証明に用いた Stokes の定理(第1.8.11節)のところで述べた通りである．また，上で述べたように $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_1=0$ と同時に，任意のスカラー関数 ρ を与えて，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1=4\pi\rho$ ならしめることは，一般に可能であるから，任意のスカラー関数 ρ を与えた場合に，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_1=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi=\nabla^2\phi=4\pi\rho \qquad (1.8.102)$$

なる方程式(この方程式を“スカラー関数に関する Poisson の方程式”と呼ぶ)を満足するスカラー関数 ϕ は，必ず存在し，かつこの解は，Stokes の定理のところで述べた原点となるべき点における ϕ の値が定まれば，一義的に定まることがわかる．

さらに，ベクトル $\boldsymbol{u}_2$ では，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_2=0$ であるから，これによって，

$$\boldsymbol{u}_2=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Psi}$$

なるベクトル関数 $\boldsymbol{\Psi}$ が必ず存在するが，上の方程式の解 $\boldsymbol{\Psi}$ は，第1.8.5節8) 項の証明で述べたように，

$$\boldsymbol{\Psi}'=\boldsymbol{\Psi}+\mathrm{grad}\,\varphi$$

として，いくつも与えられることがわかっているので，$\boldsymbol{\Psi}'$ を制限するための条件として，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Psi}=\nabla\boldsymbol{\Psi}=0 \qquad (\mathrm{c})$$

を付加条件とすると，次の方程式，

$$4\pi\boldsymbol{I}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}_2=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Psi}$$

すなわち，　$4\pi\boldsymbol{I}=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\Psi})=\nabla(\nabla\boldsymbol{\Psi})-\nabla^2\boldsymbol{\Psi}$

《∵　第1.8.5節6) 項 (1.8.33) 式による》

は，　$4\pi\boldsymbol{I}=-\nabla^2\boldsymbol{\Psi}$　となる．

すなわち，　$\nabla^2\boldsymbol{\Psi}=-4\pi\boldsymbol{I} \qquad (1.8.103)$

なる方程式となる．これは“ベクトル関数に対する Poisson の方程式”である．

上式における $\boldsymbol{I}$ は,

$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{u}=0$$

が恒等的に成立つから，div $\boldsymbol{I}=0$ でなければならず，したがって $\boldsymbol{I}$ は全く任意なものではないが，**div $\boldsymbol{I}=0$ なるように，$\boldsymbol{I}$ が与えられておれば，** 必ず rot $\boldsymbol{u}_2=4\pi\boldsymbol{I}$ なる $\boldsymbol{u}_2$ が存在し，さらに div $\boldsymbol{u}_2=0$ であるから必ず rot $\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{u}_2$ なるベクトル関数 $\boldsymbol{\Psi}$ が存在する．**この場合に，（c）なる付加条件を同時に成立せしめるならば，(1.8.103) なる Poisson の方程式が得られ，これは常に一義的な解を有する**ことがわかる．

次に，（c）式，すなわち div $\boldsymbol{\Psi}=0$ なる付加条件を成立せしめるときは，$\boldsymbol{\Psi}$ はまた，他のベクトル関数 $\boldsymbol{G}$ の回転，すなわち，

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{G}=\boldsymbol{\Psi} \tag{1.8.104}$$

なるベクトル関数 $\boldsymbol{G}$ が必ず存在する．この $\boldsymbol{G}$ もまた，上述の理と同じ理由でいくつも存在するから，付加条件として，

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{G}=\phi \tag{1.8.105}$$

ならしめるようにすれば，$\boldsymbol{G}$ は唯一通りに定まる．したがって，一般のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ は，一つのベクトル関数 $\boldsymbol{G}$ を用いて，常に，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2\\&=\mathrm{grad}\ \phi+\mathrm{rot}\ \boldsymbol{\Psi}\\&=\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{G}+\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{G}\end{aligned} \tag{1.8.106}$$

のように表される．上記(1.8.106)式のベクトル $\boldsymbol{G}$ を "Galerkin のベクトル" とよんでいる．

翻って，ベクトル $\boldsymbol{u}_1$ について考えてみると，デカルト座標系におけるその変位勾配テンソルは常に，

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial(u_1)_x}{\partial x} & \dfrac{\partial(u_1)_x}{\partial y} & \dfrac{\partial(u_1)_x}{\partial z}\\ \dfrac{\partial(u_1)_y}{\partial x} & \dfrac{\partial(u_1)_y}{\partial y} & \dfrac{\partial(u_1)_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial(u_1)_z}{\partial x} & \dfrac{\partial(u_1)_z}{\partial y} & \dfrac{\partial(u_1)_z}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{3}(\nabla\boldsymbol{u}_1) & & 0\\ & \dfrac{1}{3}(\nabla\boldsymbol{u}_1) & \\ 0 & & \dfrac{1}{3}(\nabla\boldsymbol{u}_1)\end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial(u_1)_x}{\partial x}-\dfrac{1}{3}\nabla\boldsymbol{u}_1\right) & \dfrac{\partial(u_1)_x}{\partial y} & \dfrac{\partial(u_1)_x}{\partial z}\\ \dfrac{\partial(u_1)_y}{\partial x} & \left(\dfrac{\partial(u_1)_y}{\partial y}-\dfrac{1}{3}\nabla\boldsymbol{u}_1\right) & \dfrac{\partial(u_1)_y}{\partial z}\\ \dfrac{\partial(u_1)_z}{\partial x} & \dfrac{\partial(u_1)_z}{\partial y} & \left(\dfrac{\partial(u_1)_z}{\partial z}-\dfrac{1}{3}\nabla\boldsymbol{u}_1\right)\end{bmatrix}$$

のように書き表すことができる．上式の第1項は，等方歪テンソルであり，また上式の第2項では，明らかに対角線項 (trace) の和は0で，かつ，最初から

rot $\boldsymbol{u}_1=0$ であるから，上式第２項のテンソルでは，発散，回転ともに０であるように思われる．しかし，第２項テンソルの対角線項の和はたしかに０ではあるが，このことは，或る変位ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在して，第２項テンソルが

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{\partial v_x}{\partial y} & \dfrac{\partial v_x}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_y}{\partial x} & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial v_z}{\partial x} & \dfrac{\partial v_z}{\partial y} & \dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{d}$$

の形に書き表されることを意味するものではなく，また第２項テンソルの対角線項の和は，決して或る変位ベクトルの発散ではないことに注意すべきである．第２項テンソルが，一般に上記の（d）式のように書き表されえないことは，rot, div の双方ともに０であるような変位ベクトルが一般に許容しうる条件の下では存在しないことを，前に証明したことからして，明らかである．

第1.9章　曲線座標系

1.9.1　曲線座標一般

デカルト座標系(x, y, z)の設定された空間に，三つの曲面の族

$$F(x, y, z)=x^1, \qquad G(x, y, z)=x^2, \qquad H(x, y, z)=x^3 \qquad (1.9.1)$$

が与えられており，空間の或る領域D内では，x^1, x^2, x^3を指定すれば，それに対応する三つの曲面は，唯１点Ｐで交わるものと仮定する．

この場合には，三つの数の値(x^1, x^2, x^3)を指定すれば，３曲面$F=x^1, G=x^2, H=x^3$から，x, y, zの値が求められ，唯１点Ｐが定まる．逆に，空間に１点Ｐをとり，座標(x, y, z)を与えれば，(1.9.1)式によって，x^1, x^2, x^3が定まる．

すなわち，領域D内では，点Ｐと三つの数の組(x^1, x^2, x^3)とが，１対１で対応しているから，(x^1, x^2, x^3)を点Ｐの新しい座標と考えうる．これを曲線座標(curvilinear coordinates)という．

さて，x^1, x^2, x^3を指定した場合に，それに対応する三つの曲面の族

$$F(x, y, z)=x^1, \qquad G(x, y, z)=x^2, \qquad H(x, y, z)=x^3$$

が共面でないための条件(唯１点Ｐで交わるための条件)を考えてみよう．

空間で共面にない三つのベクトル，$d\boldsymbol{a}, d\boldsymbol{b}, d\boldsymbol{c}$（この順序で右手系を形成するものとする．もしも，左手系のときは符号だけ変る）をとり，この三つのベクトルによって作られる斜方立方体の体積Vを考えると，第1.4.3節によって，

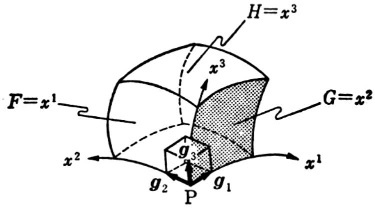
$$V=\begin{vmatrix} da_x & db_x & dc_x \\ da_y & db_y & dc_y \\ da_z & db_z & dc_z \end{vmatrix}$$

また，

$$V=\sqrt{g}\begin{vmatrix} da^1 & db^1 & dc^1 \\ da^2 & db^2 & dc^2 \\ da^3 & db^3 & dc^3 \end{vmatrix}$$

である．また一方，

$$\begin{bmatrix} da^1 & db^1 & dc^1 \\ da^2 & db^2 & dc^2 \\ da^3 & db^3 & dc^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x} & \dfrac{\partial x^1}{\partial y} & \dfrac{\partial x^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial x} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y} & \dfrac{\partial x^2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial x} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y} & \dfrac{\partial x^3}{\partial z} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} da_x & db_x & dc_x \\ da_y & db_y & dc_y \\ da_z & db_z & dc_z \end{bmatrix}$$



第74図 三つの曲面の族, $F=x^1$, $G=x^2$, $H=x^3$, によって作られる立体

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} da^1 & db^1 & dc^1 \\ da^2 & db^2 & dc^2 \\ da^3 & db^3 & dc^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta^1_x & \beta^1_y & \beta^1_z \\ \beta^2_x & \beta^2_y & \beta^2_z \\ \beta^3_x & \beta^3_y & \beta^3_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} da_x & db_x & dc_x \\ da_y & db_y & dc_y \\ da_z & db_z & dc_z \end{vmatrix}$$

ゆえに，上式右辺の第１項を $|\beta^i_{i'}|$ と表すことにすれば，(1.4.11)式から，

$$|\beta^i_{i'}| = \frac{1}{\sqrt{g}} \qquad (1.9.2)$$

であることがわかる．この値は，空間における微小 block のデカルト座標系(x, y, z)における体積(真の体積)に対する，同一 block の新座標系(x^1, x^2, x^3)での数値上の体積(見掛け上の体積)の倍率である．したがって，新座標系(x^1, x^2, x^3)の座標構枠(natural frame または reference frame)の１ブロックの体積は，$\sqrt{g}=1/|\beta^i_{i'}|=|\beta^{i'}_i|$ であることがわかる．

三つの曲面の族，$F=x^1, G=x^2, H=x^3$ が共面でないということは，新座標系(x^1, x^2, x^3)の natural frame の１ブロックが真に立体を形成するということと同義であるから，この条件は，新座標系(x^1, x^2, x^3)の natural frame の１ブロックの体積が０でないことである．すなわち，三つの曲面，$F=x^1, G=x^2, H=x^3$ が曲線座標網を形成するための必要かつ十分な条件は，

$$\sqrt{g} = |\beta^{i'}_i| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} \right| \neq 0 \qquad (1.9.3)$$

なることである．

1.9.2 曲線座標系公式に対する注意事項

本章の次節以下では，解析上しばしば用いられる各種曲線座標系の個々の場合について公式を示すことにするが，それに先立って，本節では，それらの公式に対する注意事項を一括して列挙しておくことにする．

1) $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はデカルト座標系 x, y, z の単位基底ベクトルを示すものとし，明示してない成分及び明示してある成分との対称関係から直接関連していない成分は，すべて０であることを示すものとする，また，座標記号として，x^1, x^2, x^3 の代りに，慣用記号，たとえば，r, θ, φ などを用い，公式の右辺の上付文字は

反変成分を示すが，右辺の上付数字は羃数を示すものとする．反変成分の羃を示す必要がある場合には，反変成分を括弧で囲み，その括弧の外の右肩に，上付数字をつけて示すこととする．

2) たとえば $\boldsymbol{g}_r, \boldsymbol{g}_\theta, \boldsymbol{g}_\varphi$ などは，その座標系の基底ベクトルを示し，$\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_\theta, \boldsymbol{i}_\varphi$ などは，同じ座標系の同一方向の単位ベクトルを示すものとする．

3) 物理学では，すべての量を物理量として与えられ，また算出結果も物理量として示すことが一般に必要である．したがって，テンソル解析上の成分と，物理成分とを，明瞭に区別する必要がある．本章では，テンソル成分には通常の記法を用い，その成分を物理成分として示す場合には，upper bar を付して示すこととする．

テンソル成分，物理成分の意味を具体的に示すと，たとえば $a^i b^j \epsilon_{ijk}$ は，ベクトル $a^i b^j \epsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^k$ のベクトル成分であり，$a^i b^j \epsilon_{ijk} \sqrt{g^{kk}}$ (ただし，k についてはsummation conventionをとらないものとする)は，同じベクトル，$a^i b^j \epsilon_{ijk} \boldsymbol{g}^k$ の物理成分である．また $a_i b^j \boldsymbol{g}^i \boldsymbol{g}_j = a_i b^j \delta^i_j = a_i b^i$ はベクトルの dot product を意味するが，$a_i b^j \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g_{jj}}$ (ただし，i, j については，summation convention をとらないものとする)は，テンソル成分 $a_i b^j$ を物理成分で示したものである．一般に，テンソル成分を物理成分に直すには，そのテンソル成分の free index の数だけ，上述のように $\sqrt{g^{ii}}$ または $\sqrt{g_{jj}}$ (ただし，i, j については summation convention をとらないものとする)などをテンソル成分に掛けてやればよい．

4) $i, j, k, \cdots; \alpha, \beta, \cdots$ などの一般的に用いられる index が dummy 形式になっている場合には，特に断りのない限り，summation convention を意味するが，個々の座標系に特有な index，たとえば r, θ, φ などが，たとえ dummy 形式になっていても，summation convention をとらないものとする．また，数字の index が，dummy 形式になっている場合も，summation convention をとらないものとする．

1.9.3 円筒座標系(直交座標系)

次に示す公式から z-成分を除けば，円筒座標系の公式は，すべて平面極座標系の公式として適用できる．

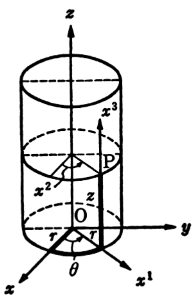
$$r = x^1, \qquad \theta = x^2, \qquad z = x^3$$

$$\boldsymbol{g}_r = \boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{i} \cos\theta + \boldsymbol{j} \sin\theta,$$

$$\boldsymbol{g}_\theta = r\,\boldsymbol{i}_\theta = -\boldsymbol{i} r \sin\theta + \boldsymbol{j} r \cos\theta$$

$$\boldsymbol{g}_z = \boldsymbol{i}_z = \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{i}_\theta = -\boldsymbol{i} \sin\theta + \boldsymbol{j} \cos\theta$$

$$\boldsymbol{g}^r = \boldsymbol{i}^r = \boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{g}_r,$$



第75図 円筒座標系

$$\boldsymbol{g}^\theta=\frac{1}{r}\boldsymbol{i}^\theta=\frac{1}{r}\boldsymbol{i}_\theta=-\frac{1}{r}\boldsymbol{i}\sin\theta+\frac{1}{r}\boldsymbol{j}\cos\theta$$

$$\boldsymbol{g}^z=\boldsymbol{i}^z=\boldsymbol{i}_z=\boldsymbol{g}_z$$

$$\begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{rz} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta z} \\ g_{zr} & g_{z\theta} & g_{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} & g^{rz} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} & g^{\theta z} \\ g^{zr} & g^{z\theta} & g^{zz} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s}=g_{ij}dx^i dx^j=dr^2+r^2d\theta^2+dz^2$$

$$dV=\sqrt{g}\begin{vmatrix} dr & 0 & 0 \\ 0 & d\theta & 0 \\ 0 & 0 & dz \end{vmatrix}=rdrd\theta dz$$

$$\Gamma_{r\theta\theta}=\frac{1}{2}(g_{\theta\theta,r}+g_{\theta r,\theta}-g_{r\theta,\theta})=r,\qquad \Gamma_{\theta\theta r}=\frac{1}{2}(g_{\theta r,\theta}+g_{r\theta,\theta}-g_{\theta\theta,r})=-r$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta}=\Gamma_{\theta\theta k}g^{kr}=\Gamma_{\theta\theta r}g^{rr}=-r,\qquad \Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma_{r\theta k}g^{k\theta}=\Gamma_{r\theta\theta}g^{\theta\theta}=r\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r}$$

$$\left.\begin{array}{lll} x=r\cos\theta, & y=r\sin\theta, & z=z \\ r=\sqrt{x^2+y^2}, & \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}, & z=z \end{array}\right\}$$ (デカルト座標系との座標の関数関係)

$$\begin{bmatrix} \beta^x_r & \beta^x_\theta & \beta^x_z \\ \beta^y_r & \beta^y_\theta & \beta^y_z \\ \beta^z_r & \beta^z_\theta & \beta^z_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \beta^r_x & \beta^r_y & \beta^r_z \\ \beta^\theta_x & \beta^\theta_y & \beta^\theta_z \\ \beta^z_x & \beta^z_y & \beta^z_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta/r & \cos\theta/r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u^r=\overline{u^r},\qquad u^\theta=\frac{1}{r}\cdot\overline{u^\theta},\qquad u^z=\overline{u^z}$$

$$u_r=\overline{u_r},\qquad u_\theta=r\cdot\overline{u_\theta},\qquad u_z=\overline{u_z}$$

(もちろん，$\overline{u^r}=\overline{u_r}$, $\overline{u^\theta}=\overline{u_\theta}$, $\overline{u^z}=\overline{u_z}$ である)

$$\mathrm{grad}\,\phi=\nabla\phi=\phi|_i\boldsymbol{g}^i=\left\{\frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{i}^r,\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\frac{1}{r}\boldsymbol{i}^\theta,\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{i}^z\right\}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=\overline{\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=u^i|_i&=u^i{}_{,i}+u^k\Gamma^i_{ik}\\ &=u^i{}_{,i}+u^r\Gamma^\theta_{\theta r}=u^i{}_{,i}+\frac{u^r}{r}\\ &=\frac{\partial u^r}{\partial r}+\frac{\partial u^\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u^z}{\partial z}+\frac{u^r}{r}\\ &=\frac{\partial\overline{u^r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\overline{u^z}}{\partial z}+\frac{\overline{u^r}}{r}\end{aligned}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{u}=u_j|_i\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k=\left\{\begin{array}{l}(u_z|_\theta-u_\theta|_z)\dfrac{1}{\sqrt{g}}\boldsymbol{g}_r\\[2ex] (u_r|_z-u_z|_r)\dfrac{1}{\sqrt{g}}\boldsymbol{g}_\theta\\[2ex] (u_\theta|_r-u_r|_\theta)\dfrac{1}{\sqrt{g}}\boldsymbol{g}_z\end{array}\right\}$$

$$=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial\theta}-\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{g}_r\\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial z}-\dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{g}_\theta\\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{g}_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\overline{u_z}}{\partial\theta}-\dfrac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}_r\\ \left(\dfrac{\partial\overline{u_r}}{\partial z}-\dfrac{\partial\overline{u_z}}{\partial r}\right)\boldsymbol{i}_\theta\\ \left(\dfrac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial r}+\dfrac{\overline{u_\theta}}{r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\overline{u_r}}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{i}_z\end{Bmatrix}$$

$$\nabla^2\phi=\phi|_i^i=\phi|_{ij}g^{ji}=(\phi_{,ij}-\phi_{,k}\Gamma_{ij}^k)g^{ji}$$

$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\partial\phi}{\partial r}r\frac{1}{r^2}\qquad(\because\ i\neq j \text{ なるとき } g^{ji}=0)$$

$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{u}=u^i|_j^j\boldsymbol{g}_i$$

$$=u^i|_{jk}g^{kj}\boldsymbol{g}_i$$

$$=\{(u^i|_j)_{,k}+u^l|_j\Gamma_{lk}^i-u^i|_l\Gamma_{jk}^l\}g^{kj}g_i$$

$$=\{(u^i_{,j}+u^m\Gamma_{mj}^i)_{,k}+(u^l_{,j}+u^m\Gamma_{mj}^l)\Gamma_{lk}^i-(u^i_{,l}+u^m\Gamma_{ml}^i)\Gamma_{jk}^l\}g^{kj}\boldsymbol{g}_i$$

$$=\begin{Bmatrix}\left[\dfrac{\partial^2u^r}{\partial r^2}+\left\{\dfrac{\partial^2u^r}{\partial\theta^2}-\dfrac{\partial}{\partial\theta}(ru^\theta)-\left(\dfrac{\partial u^\theta}{\partial\theta}+\dfrac{u^r}{r}\right)r+r\dfrac{\partial u^r}{\partial r}\right\}\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{\partial^2u^r}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{g}_r\\ \left[\dfrac{\partial^2u^\theta}{\partial r^2}+\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{u^\theta}{r}\right)+\left(\dfrac{\partial u^\theta}{\partial r}+\dfrac{u^\theta}{r}\right)\dfrac{1}{r}+\left\{\dfrac{\partial^2u^\theta}{\partial\theta^2}+\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\dfrac{u^r}{r}\right)+\left(\dfrac{\partial u^r}{\partial\theta}-ru^\theta\right)\dfrac{1}{r}+\left(\dfrac{\partial u^\theta}{\partial r}+\dfrac{u^\theta}{r}\right)r\right\}\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{\partial^2u^\theta}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{g}_\theta\\ \left[\dfrac{\partial^2u^z}{\partial r^2}+\left\{\dfrac{\partial^2u^z}{\partial\theta^2}+r\dfrac{\partial u^z}{\partial r}\right\}\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{\partial^2u^z}{\partial z^2}\right]\boldsymbol{g}_z\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}\left(\dfrac{\partial^2\overline{u^r}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial r}-\dfrac{\overline{u^r}}{r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\overline{u^r}}{\partial\theta^2}-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial^2\overline{u^r}}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i}_r\\ \left(\dfrac{\partial^2\overline{u^\theta}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial r}-\dfrac{\overline{u^\theta}}{r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\overline{u^\theta}}{\partial\theta^2}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial^2\overline{u^\theta}}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i}_\theta\\ \left(\dfrac{\partial^2\overline{u^z}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\overline{u^z}}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\overline{u^z}}{\partial r}+\dfrac{\partial^2\overline{u^z}}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i}_z\end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_i|_j+u_j|_i)=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}-2u_k\Gamma_{ij}^k)$$

$$\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{\partial\overline{u_r}}{\partial r},$$

$$\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-2u_\theta\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u_r}}{\partial\theta}+r\frac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial r}-\overline{u_\theta}\right)$$

$$\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{u_r}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{u_z}}{\partial r}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+ru_r=r\frac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial\theta}+r\overline{u_r}$$

$$\varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(r\frac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{u_z}}{\partial\theta}\right),\qquad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{\partial\overline{u_z}}{\partial z}$$

$$[\overline{\varepsilon_{ij}}]=[\varepsilon_{ij}\sqrt{g^{ii}}\sqrt{g^{jj}}]\qquad \text{(not summation convention for } i, j)$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\overline{u_r}}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\overline{u_r}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial r}-\dfrac{\overline{u_\theta}}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\overline{u_r}}{\partial z}+\dfrac{\partial\overline{u_z}}{\partial r}\right)\\ & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial\theta}+\overline{u_r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\overline{u_z}}{\partial\theta}\right)\\ \text{(SYM)} & & \dfrac{\partial\overline{u_z}}{\partial z}\end{bmatrix}$$

$$E^{ijlm}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{lj}+\frac{2\nu}{1-2\nu}g^{ij}g^{lm}\right)$$

（ただし，等方体とし，またνは Poisson 比とする）

$$\sigma^{ij}=E^{ijlm}\varepsilon_{lm}=E^{ijlm}\overline{\varepsilon_{lm}}\frac{1}{\sqrt{g^{ll}}\sqrt{g^{mm}}}$$

$$E^{rrrr}=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\qquad E^{rr\theta\theta}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$E^{rrzz}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\qquad E^{r\theta r\theta}=\frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$E^{rzrz}=\frac{E}{2(1+\nu)},\qquad E^{\theta\theta\theta\theta}=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\frac{1}{r^4}$$

$$E^{\theta\theta zz}=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\cdot\frac{1}{r^2},\qquad E^{\theta z\theta z}=\frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$E^{zzzz}=\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$[\sigma^{ij}]=\frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix}\overline{\varepsilon_{rr}} & \dfrac{1}{r}\overline{\varepsilon_{r\theta}} & \overline{\varepsilon_{rz}}\\ & \dfrac{1}{r^2}\overline{\varepsilon_{\theta\theta}} & \dfrac{1}{r}\overline{\varepsilon_{\theta z}}\\ \text{(SYM)} & & \overline{\varepsilon_{zz}}\end{bmatrix}$$

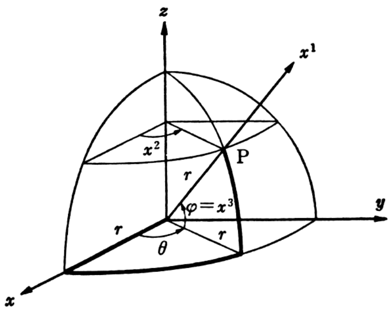
$$+\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \dfrac{1}{r^2} & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}(\overline{\varepsilon_{rr}}+\overline{\varepsilon_{\theta\theta}}+\overline{\varepsilon_{zz}})$$

$$[\overline{\sigma^{ij}}]=\sigma^{ij}\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}\qquad \text{(not summation convention for } i, j)$$

$$=\frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix}\overline{\varepsilon_{rr}} & \overline{\varepsilon_{r\theta}} & \overline{\varepsilon_{rz}}\\ & \overline{\varepsilon_{\theta\theta}} & \overline{\varepsilon_{\theta z}}\\ \text{(SYM)} & & \overline{\varepsilon_{zz}}\end{bmatrix}+\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}(\overline{\varepsilon_{rr}}+\overline{\varepsilon_{\theta\theta}}+\overline{\varepsilon_{zz}})$$

上式は，デカルト座標系の場合と同形であることに注意すること．

1.9.4 球面座標系(直交座標系)



第76図 球面座標系

$$r=x^1,\qquad \theta=x^2,\qquad \varphi=x^3$$

$$\boldsymbol{g}_r=\boldsymbol{i}_r=(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)\cos\varphi+\boldsymbol{k}\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{g}_\theta=\boldsymbol{i}_\theta r\cos\varphi=r(-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta)\cos\varphi$$

$$\boldsymbol{g}_\varphi=\boldsymbol{i}_\varphi r=-r(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)\sin\varphi+\boldsymbol{k}r\cos\varphi$$

$$\boldsymbol{g}^r=\boldsymbol{i}^r=\boldsymbol{i}_r=\boldsymbol{g}_r$$

$$\boldsymbol{g}^\theta=\boldsymbol{i}^\theta\cdot\frac{1}{r\cos\varphi}=-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta$$

$$\boldsymbol{g}^\varphi=\boldsymbol{i}^\varphi\frac{1}{r}=-(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)\sin\varphi+\boldsymbol{k}\cos\varphi$$

$$\begin{bmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\varphi} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi r} & g_{\varphi\theta} & g_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} g^{rr} & g^{r\theta} & g^{r\varphi} \\ g^{\theta r} & g^{\theta\theta} & g^{\theta\varphi} \\ g^{\varphi r} & g^{\varphi\theta} & g^{\varphi\varphi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/(r^2\cos^2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{r\varphi\varphi}=-\Gamma_{\varphi\varphi r}=r,\qquad \Gamma_{r\theta\theta}=-\Gamma_{\theta\theta r}=r\cos^2\varphi$$

$$\Gamma_{\theta\theta\varphi}=-\Gamma_{\theta\varphi\theta}=r^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta}=-r\cos^2\varphi,\qquad \Gamma^\varphi_{\theta\theta}=\cos\varphi\sin\varphi,\qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi}=-r$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\varphi_{r\varphi}=\frac{1}{r},\qquad \Gamma^\theta_{\theta\varphi}=-\tan\varphi$$

$$d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s}=g_{ij}dx^idx^j=dr^2+r^2\cos^2\varphi d\theta^2+r^2d\varphi^2$$

$$dV=\sqrt{g}\begin{vmatrix} dr & 0 & 0 \\ 0 & d\theta & 0 \\ 0 & 0 & d\varphi \end{vmatrix}=r^2\cos\varphi drd\theta d\varphi$$

$$u^r=\overline{u^r},\qquad u^\theta=\frac{1}{r\cos\varphi}\overline{u^\theta},\qquad u^\varphi=\frac{1}{r}\overline{u^\varphi}$$

$$u_r=\overline{u_r},\qquad u_\theta=r\cos\varphi\cdot\overline{u_\theta},\qquad u_\varphi=r\overline{u_\varphi}$$

ただし，$\overline{u^r}=\overline{u_r}$, $\overline{u^\theta}=\overline{u_\theta}$, $\overline{u^\varphi}=\overline{u_\varphi}$ であることはいうまでもない．

$$\mathrm{grad}\,\phi=\nabla\phi=\phi|_i\boldsymbol{g}^i$$

$$=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{i}^r\\[2mm]\dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{i}^\theta\\[2mm]\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}^\varphi\end{Bmatrix}\qquad (\text{ただし，}\ \phi\text{：スカラー関数})$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=u^i|_i=u^i{}_{,i}+u^k\Gamma^i_{ik}$$

$$=\frac{\partial u^r}{\partial r}+\frac{\partial u^\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u^\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2}{r}(u^r)-u^\varphi\tan\varphi$$

$$=\frac{\partial\overline{u^r}}{\partial r}+\frac{2}{r}\overline{u^r}+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{u^\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{\overline{u^\varphi}}{r}\tan\varphi$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}=\nabla\cdot\boldsymbol{u}=u_j|_i\epsilon^{ijk}\boldsymbol{g}_k$$

$$=\begin{Bmatrix}(u_\varphi|_\theta-u_\theta|_\varphi)\dfrac{1}{r^2\cos\varphi}\boldsymbol{i}_r\\[2mm](u_r|_\varphi-u_\varphi|_r)\dfrac{1}{r^2\cos\varphi}r\cos\varphi\boldsymbol{i}_\theta\\[2mm](u_\theta|_r-u_r|_\theta)\dfrac{1}{r^2\cos\varphi}r\boldsymbol{i}_\varphi\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{r^2\cos\varphi}\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{i}_r\\[2mm]\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right)\boldsymbol{i}_\theta\\[2mm]\dfrac{1}{r\cos\varphi}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{i}_\varphi\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{r\cos\varphi}\left(\dfrac{\partial\overline{u_\varphi}}{\partial\theta}+\overline{u_\theta}\sin\varphi-\cos\varphi\cdot\dfrac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{i}_r\\[2mm]\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\overline{u_r}}{\partial\varphi}-\overline{u_\varphi}-r\dfrac{\partial\overline{u_\varphi}}{\partial r}\right)\boldsymbol{i}_\theta\\[2mm]\dfrac{1}{r\cos\varphi}\left(r\cos\varphi\dfrac{\partial\overline{u_\theta}}{\partial r}+\overline{u_\theta}\cdot\cos\varphi-\dfrac{\partial\overline{u_r}}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{i}_\varphi\end{Bmatrix}$$

$$\nabla^2\phi=\phi|^i_i=\phi|_{ij}g^{ji}=(\phi_{,ij}-\phi_{,k}\Gamma^k_{ij})g^{ji}$$

$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}-\tan\varphi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{u}=u^i|^j_j\boldsymbol{g}_i$$

$$u^i|^j_j=u^i|_{jk}g^{kj}=(u^i|_j)|_kg^{kj}=\{(u^i|_j)_{,k}+u^l|_j\Gamma^i_{lk}-u^i|_l\Gamma^l_{jk}\}g^{kj}$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 u^r}{\partial r^2}+\left\{\dfrac{\partial^2 u^r}{\partial\theta^2}-2r\cos^2\varphi\dfrac{\partial u^\theta}{\partial\theta}+r\cos^2\varphi\dfrac{\partial u^r}{\partial r}\right.\\
\qquad -\cos\varphi\sin\varphi\dfrac{\partial u^r}{\partial\varphi}+2r\cos\varphi\sin\varphi\cdot u^\varphi\\
\qquad \left.-u^r\cos^2\varphi\right\}\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}+\left\{\dfrac{\partial^2 u^r}{\partial\varphi^2}-2r\dfrac{\partial u^\varphi}{\partial\varphi}-u^r+r\dfrac{\partial u^r}{\partial r}\right\}\dfrac{1}{r^2}\\
\dfrac{\partial^2 u^\theta}{\partial r^2}+\dfrac{4}{r}\dfrac{\partial u^\theta}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2 u^\theta}{\partial\theta^2}+\dfrac{2}{r^3\cos^2\varphi}\dfrac{\partial u^r}{\partial\theta}\\
\qquad -\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\tan\varphi}{\cos^2\varphi}\cdot\dfrac{\partial u^\varphi}{\partial\theta}-\dfrac{3}{r^2}\tan\varphi\dfrac{\partial u^\theta}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u^\theta}{\partial\varphi^2}\\
\dfrac{\partial^2 u^\varphi}{\partial r^2}+\dfrac{4}{r}\dfrac{\partial u^\varphi}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2 u^\varphi}{\partial\theta^2}+\dfrac{2}{r^2}\tan\varphi\cdot\dfrac{\partial u^\theta}{\partial\theta}\\
\qquad +\dfrac{u^\varphi}{r^2}(1-\tan^2\varphi)-\dfrac{1}{r^2}\tan\varphi\dfrac{\partial u^\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u^\varphi}{\partial\varphi^2}+\dfrac{2}{r^3}\dfrac{\partial u^r}{\partial\varphi}
\end{array}\right\}
$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2\overline{u^r}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial r}-2\dfrac{\overline{u^r}}{r^2}+\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2\overline{u^r}}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\overline{u^r}}{\partial\varphi^2}\\
\qquad -\dfrac{\tan\varphi}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial\varphi}-\dfrac{2}{r^2\cos\varphi}\dfrac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial\theta}-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u^\varphi}}{\partial\varphi}+\dfrac{2}{r^2}\overline{u^\varphi}\tan\varphi\\
\dfrac{2}{r^3\cos^2\varphi}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial\theta}+\dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial^2\overline{u^\theta}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r^2\cos\varphi}\dfrac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial r}+\dfrac{1}{r^3\cos^3\varphi}\dfrac{\partial^2\overline{u^\theta}}{\partial\theta^2}\\
\qquad +\dfrac{1}{r_3\cos\varphi}\dfrac{\partial^2\overline{u^\theta}}{\partial\varphi^2}-\dfrac{1}{r^3}\dfrac{\tan\varphi}{\cos\varphi}\dfrac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial\varphi}-\dfrac{1}{r^3}\dfrac{\overline{u^\theta}}{\cos^3\varphi}\\
\qquad -\dfrac{2}{r^3\cos^2\varphi}\tan\varphi\dfrac{\partial\overline{u^\varphi}}{\partial\theta}\\
\dfrac{2}{r^3}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial\varphi}+\dfrac{2}{r^3}\dfrac{\tan\varphi}{\cos\varphi}\dfrac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\overline{u^\varphi}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u^\varphi}}{\partial r}+\dfrac{1}{r^3\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2\overline{u^\varphi}}{\partial\theta^2}\\
\qquad +\dfrac{1}{r^3}\dfrac{\partial^2\overline{u^\varphi}}{\partial\varphi^2}-\dfrac{1}{r^3}\tan\varphi\dfrac{\partial\overline{u^\varphi}}{\partial\varphi}-\dfrac{1}{r^3}\overline{u^\varphi}\sec^2\varphi
\end{array}\right\}
$$

$$
\nabla^2\boldsymbol{u}=u^i|^j_j\boldsymbol{g}_i=u^i|^j_j\sqrt{g_{ii}}\,\boldsymbol{i}_i
$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
\left(\dfrac{\partial^2\overline{u^r}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2\overline{u^r}}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\overline{u^r}}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\tan\varphi}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial\varphi}\right.\\
\qquad \left.-2\dfrac{\overline{u^r}}{r^2}-\dfrac{2}{r^2\cos\varphi}\dfrac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial\theta}-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u^\varphi}}{\partial\varphi}+\dfrac{2}{r^2}\overline{u^\varphi}\tan\varphi\right)\boldsymbol{i}_r\\
\left(\dfrac{2}{r^2\cos\varphi}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial^2\overline{u^\theta}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2\overline{u^\theta}}{\partial\theta^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\overline{u^\theta}}{\partial\varphi^2}\right.\\
\qquad \left.-\dfrac{1}{r^2}\tan\varphi\dfrac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial\varphi}-\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\overline{u^\theta}-\dfrac{2}{r^2\cos\varphi}\tan\varphi\cdot\dfrac{\partial\overline{u^\varphi}}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{i}_\theta\\
\left(\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u^r}}{\partial\varphi}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\tan\varphi}{\cos\varphi}\dfrac{\partial\overline{u^\theta}}{\partial\theta}+\dfrac{\partial^2\overline{u^\varphi}}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial\overline{u^\varphi}}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2\overline{u^\varphi}}{\partial\theta^2}\right.\\
\qquad \left.+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\overline{u^\varphi}}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\tan\varphi}{r^2}\dfrac{\partial\overline{u^\varphi}}{\partial\varphi}-\dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\overline{u^\varphi}\right)\boldsymbol{i}_\varphi
\end{array}\right\}
$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_j|_i+u_i|_j)=\frac{1}{2}(u_{j,i}+u_{i,j}-2u_k\Gamma^k_{ij})$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{r\varphi}\\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta\varphi}\\ \varepsilon_{\varphi r} & \varepsilon_{\varphi\theta} & \varepsilon_{\varphi\varphi}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta}+\dfrac{\partial u_\theta}{\partial r}-2\dfrac{u_\theta}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial r}-2\dfrac{u_\varphi}{r}\right)\\ & \left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_r r\cos^2\varphi-u_\varphi\cos\varphi\sin\varphi\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+2u_\theta\tan\varphi\right)\\ \text{(SYM)} & & \left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+ru_r\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{u}_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\bar{u}_r}{\partial\theta}+r\cos\varphi\dfrac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial r}-\bar{u}_\theta\cdot\cos\varphi\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\bar{u}_r}{\partial\varphi}+r\dfrac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial r}-\bar{u}_\varphi\right)\\ & \left(r\cos\varphi\dfrac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta}+r\bar{u}_r\cos^2\varphi-r\bar{u}_\varphi\cos\varphi\sin\varphi\right) & \dfrac{1}{2}\left(r\cos\varphi\dfrac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\varphi}+r\bar{u}_\theta\sin\varphi+r\dfrac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial\theta}\right)\\ \text{(SYM)} & & r\left(\dfrac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial\varphi}+\bar{u}_r\right)\end{bmatrix}$$

$$[\overline{\varepsilon_{ij}}]=[\varepsilon_{ij}\sqrt{g^{ii}}\sqrt{g^{jj}}]\qquad\text{(not summation convention for } i,j\text{)}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\bar{u}_r}{\partial r} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial\bar{u}_r}{\partial\theta}+\dfrac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial r}-\dfrac{\bar{u}_\theta}{r}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\bar{u}_r}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial r}-\dfrac{\bar{u}_\varphi}{r}\right)\\ & \left(\dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\theta}+\dfrac{\bar{u}_r}{r}-\dfrac{\bar{u}_\varphi}{r}\tan\varphi\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\bar{u}_\theta}{\partial\varphi}+\dfrac{\bar{u}_\theta}{r}\tan\varphi+\dfrac{1}{r\cos\varphi}\dfrac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial\theta}\right)\\ \text{(SYM)} & & \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial\bar{u}_\varphi}{\partial\varphi}+\bar{u}_r\right)\end{bmatrix}$$

$$[\overline{\sigma^{ij}}]=2G\left([\overline{\varepsilon_{ij}}]+\frac{\nu}{(1-2\nu)}\overline{\varepsilon_{mm}}\delta_{ij}\right)$$

N. B. : 上式は，左辺と右辺とで variance を異にしているようであるが，物理成分なので，デカルト座標系の場合と同様に，一向に構わないのである．

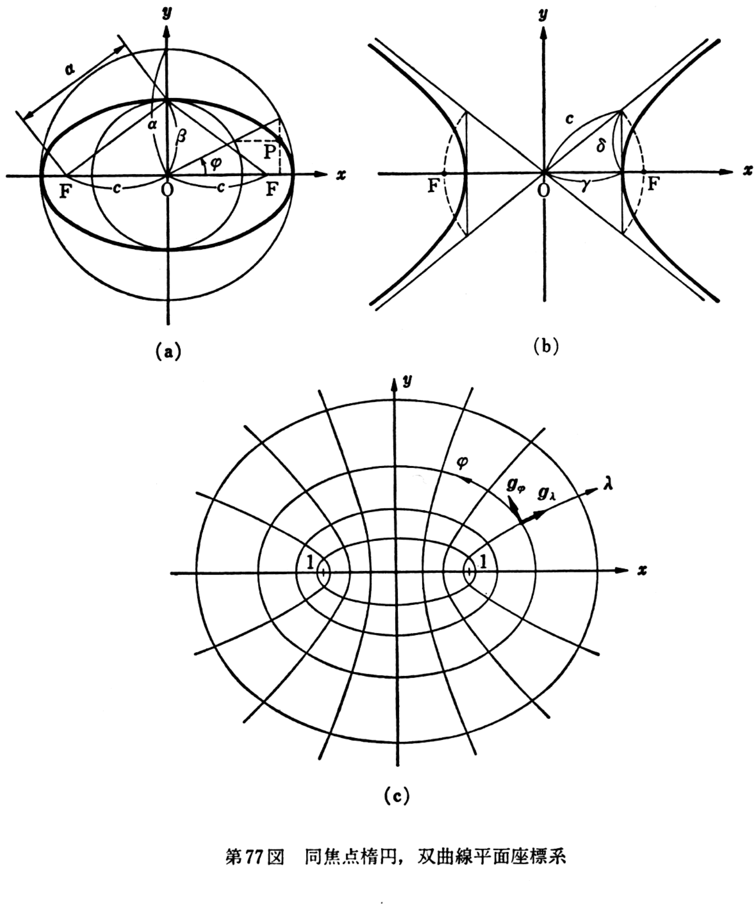
デカルト座標系との座標の関数関係；

$$\left.\begin{array}{lll} x=r\cos\varphi\cos\theta, & y=r\cos\varphi\sin\theta, & z=r\sin\varphi \\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, & \theta=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}, & \varphi=\tan^{-1}\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} \beta^x_r & \beta^x_\theta & \beta^x_\varphi \\ \beta^y_r & \beta^y_\theta & \beta^y_\varphi \\ \beta^z_r & \beta^z_\theta & \beta^z_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta^r_x & \beta^r_y & \beta^r_z \\ \beta^\theta_x & \beta^\theta_y & \beta^\theta_z \\ \beta^\varphi_x & \beta^\varphi_y & \beta^\varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ -\dfrac{\sin\theta}{r\cos\varphi} & \dfrac{\cos\theta}{r\cos\varphi} & 0 \\ -\dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta\sin\varphi}{r} & \dfrac{\cos\varphi}{r} \end{bmatrix}$$

1.9.5 同焦点楕円，双曲線平面座標系(直交座標系)



第77図　同焦点楕円，双曲線平面座標系

楕円の方程式

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha\cos\varphi \\ y=\beta\sin\varphi \end{array}\right\}\qquad \text{ただし，}\alpha^2-\beta^2=c^2 \qquad \text{《第 77 図(a)参照》}$$

双曲線の方程式

$$\frac{x^2}{\gamma^2}-\frac{y^2}{\delta^2}=1$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\gamma\cosh\lambda \\ y=\delta\sinh\lambda \end{array}\right\}\qquad \text{ただし，}\gamma^2+\delta^2=c^2 \qquad \text{《第 77 図(b)参照》}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{array}{l} \alpha=c\cosh\lambda \\ \beta=c\sinh\lambda \end{array}\right\}\qquad \left.\begin{array}{l} \gamma=c\cos\varphi \\ \delta=c\sin\varphi \end{array}\right\}$$

デカルト座標系との座標の関数関係

$$\left.\begin{array}{l} x=\alpha\cos\varphi=c\cosh\lambda\cos\varphi \\ y=\beta\sin\varphi=c\sinh\lambda\sin\varphi \end{array}\right\}$$

今，$c=1$ とし，$\lambda=x^1, \varphi=x^2$ とする.

位置ベクトル，$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\cosh\lambda\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sinh\lambda\sin\varphi$

$$\boldsymbol{g}_\lambda=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\lambda}=\boldsymbol{i}\sinh\lambda\cos\varphi+\boldsymbol{j}\cosh\lambda\sin\varphi$$

$$\boldsymbol{g}_\varphi=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}=-\boldsymbol{i}\cosh\lambda\sin\varphi+\boldsymbol{j}\sinh\lambda\cos\varphi$$

$$g_{\lambda\lambda}=g_{\varphi\varphi}=\cosh^2\lambda-\cos^2\varphi$$

$$g^{\lambda\lambda}=g^{\varphi\varphi}=\frac{1}{\cosh^2\lambda-\cos^2\varphi}$$

$$\Gamma_{\lambda\lambda\lambda}=\Gamma_{\lambda\varphi\varphi}=-\Gamma_{\varphi\varphi\lambda}=\cosh\lambda\sinh\lambda$$

$$-\Gamma_{\lambda\lambda\varphi}=\Gamma_{\lambda\varphi\lambda}=\Gamma_{\varphi\varphi\varphi}=\cos\varphi\sin\varphi$$

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\lambda}=\Gamma^\varphi_{\lambda\varphi}=-\Gamma^\lambda_{\varphi\varphi}=\frac{\cosh\lambda\sinh\lambda}{\cosh^2\lambda-\cos^2\varphi}$$

$$-\Gamma^\varphi_{\lambda\lambda}=\Gamma^\lambda_{\lambda\varphi}=\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}=\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\cosh^2\lambda-\cos^2\varphi}$$

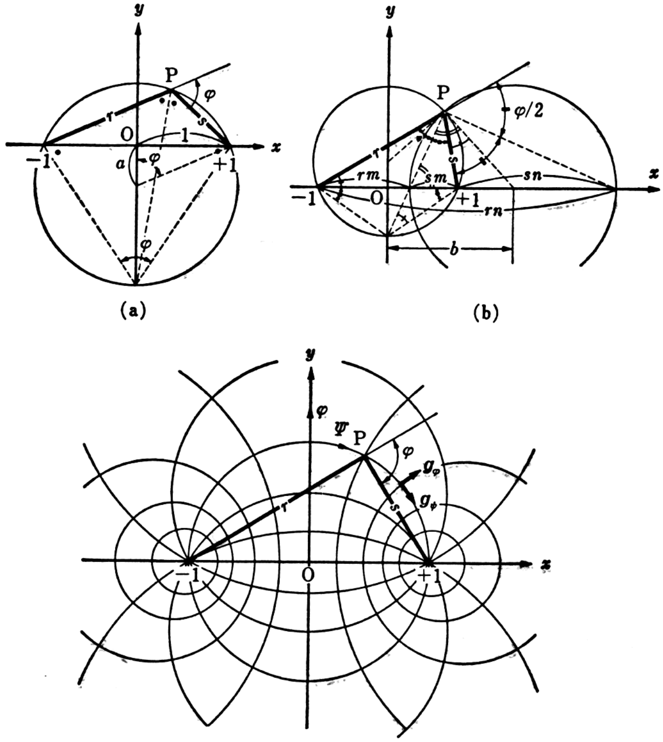
1.9.6 平面双極座標系(直交座標系)

デカルト座標系の y 軸上 $(-a)$ 点に中心を有し，x 軸上の$(+1)$及び(-1)の2極を通る円の方程式《第 78 図(a)参照》

$$x^2+(y+a)^2=a^2+1$$

$$x^2+y^2+2ay=1$$

$$\therefore\quad \frac{2y}{1-x^2-y^2}=\frac{1}{a}=\tan\varphi \qquad \text{とおく.}$$



(a) (b) (c)

第78図 平面双極座標系

x 軸上の(+1)及び(−1)の２極を底辺とする三角形の頂角及び頂角の外角をそれぞれ二等分する線が三角形の底辺及び底辺の延長と交わる２点を直径とする円の方程式《第78図(b)参照》

$$(x-b)^2+y^2=b^2-1$$

$$x^2+y^2+1=2bx$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{1+x^2+y^2}=\frac{1}{b}=\frac{r^2-s^2}{r^2+s^2}=\frac{\left(\frac{r}{s}\right)-\left(\frac{s}{r}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)+\left(\frac{s}{r}\right)}=\tanh\Psi \quad \text{とおく.}$$

したがって，デカルト座標系との座標の関数関係は次のようになる.

$$x=\frac{\sinh\Psi}{\cosh\Psi+\cos\varphi}, \qquad y=\frac{\sin\varphi}{\cosh\Psi+\cos\varphi}$$

$$x^1=\Psi=\log\left(\frac{r}{s}\right), \qquad x^2=\varphi$$

位置ベクトル $\boldsymbol{r}=\dfrac{1}{\cosh\Psi+\cos\varphi}(\boldsymbol{i}\sinh\Psi+\boldsymbol{j}\sin\varphi)$

$$\boldsymbol{g}_\Psi=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\Psi}=\boldsymbol{i}\frac{1+\cosh\Psi\cos\varphi}{(\cosh\Psi+\cos\varphi)^2}-\boldsymbol{j}\frac{\sinh\Psi\sin\varphi}{(\cosh\Psi+\cos\varphi)^2}$$

$$\boldsymbol{g}_\varphi=\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}=\boldsymbol{i}\frac{\sinh\Psi\sin\varphi}{(\cosh\Psi+\cos\varphi)^2}+\boldsymbol{j}\frac{1+\cosh\Psi\cos\varphi}{(\cosh\Psi+\cos\varphi)^2}$$

$$g_{\Psi\Psi}=g_{\varphi\varphi}=\frac{1}{(\cosh\Psi+\cos\varphi)^2},\qquad g^{\Psi\Psi}=g^{\varphi\varphi}=(\cosh\Psi+\cos\varphi)^2$$

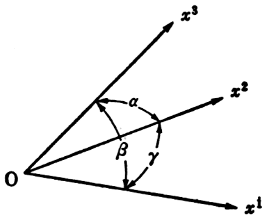
$$\Gamma_{\Psi\Psi\Psi}=\Gamma_{\Psi\varphi\varphi}=-\Gamma_{\varphi\varphi\Psi}=-\frac{\sinh\Psi}{(\cosh\Psi+\cos\varphi)^3}$$

$$\Gamma_{\Psi\Psi\varphi}=-\Gamma_{\Psi\varphi\Psi}=-\Gamma_{\varphi\varphi\varphi}=-\frac{\sin\varphi}{(\cosh\Psi+\cos\varphi)^3}$$

$$\Gamma^{\Psi}_{\Psi\Psi}=\Gamma^{\varphi}_{\Psi\varphi}=-\Gamma^{\Psi}_{\varphi\varphi}=\frac{\sinh\Psi}{\cosh\Psi+\cos\varphi}$$

$$\Gamma^{\Psi}_{\Psi\varphi}=-\Gamma^{\varphi}_{\Psi\Psi}=\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}=\frac{\sin\varphi}{\cosh\Psi+\cos\varphi}$$

1.9.7 斜交直線座標系



第79図 斜交直線座標系

基底ベクトル

$$\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{i}_1,\qquad \boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{i}_2,\qquad \boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{i}_3$$

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1,\qquad g_{12}=\cos\gamma,$$

$$g_{23}=\cos\alpha,\qquad g_{13}=\cos\beta$$

$$g=\begin{vmatrix}g_{11}&g_{12}&g_{13}\\g_{21}&g_{22}&g_{23}\\g_{31}&g_{32}&g_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\cos\gamma&\cos\beta\\&1&\cos\alpha\\(\mathrm{SYM})&&1\end{vmatrix}$$

$$=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

g^{jk} を求めるには,

$$\left.\begin{aligned}g_{11}g^{j1}+g_{12}g^{j2}+g_{13}g^{j3}=\delta^j_1\\g_{21}g^{j1}+g_{22}g^{j2}+g_{23}g^{j3}=\delta^j_2\\g_{31}g^{j1}+g_{32}g^{j2}+g_{33}g^{j3}=\delta^j_3\end{aligned}\right\}$$

を解いて求めればよい. その結果は次の通りである.

$$g^{11}=\frac{\sin^2\alpha}{g},\qquad g^{22}=\frac{\sin^2\beta}{g},\qquad g^{33}=\frac{\sin^2\gamma}{g}$$

$$g^{12}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos\gamma}{g},\qquad g^{23}=\frac{\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha}{g},$$

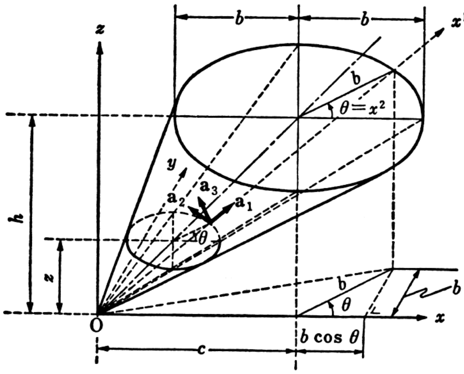
$$g^{31}=\frac{\cos\gamma\cos\alpha-\cos\beta}{g}$$

また, 直線座標系であるから, この場合の Γ はすべて0である.

1.9.8 斜円錐面座標系(曲面座標系)(第1.12.3節例題4参照)

円錐面上の座標 x^α は，x^1 及び $x^2=\theta$ とする(第80図参照).

また，$z=$const. なる曲線は，水平な円で，$\theta=$const. なる線は，直線母線であるとする.



第80図　斜円錐面座標系

曲面上の基底ベクトル：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}_1&=\frac{1}{h}\{\boldsymbol{i}(c+b\cos\theta)+\boldsymbol{j}b\sin\theta+\boldsymbol{k}h\}\\ \mathbf{a}_\theta&=\frac{z}{h}(b\boldsymbol{i}_\theta)=\frac{zb}{h}(-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta)\end{aligned}\right\}$$

メートリック・テンソル：

$$a_{11}=\frac{1}{h^2}(h^2+b^2+c^2+2bc\cos\theta)$$

$$a_{1\theta}=-\frac{bcz}{h^2}\sin\theta,\qquad a_{\theta\theta}=\frac{b^2z^2}{h^2}$$

$a^{\alpha\beta}$ を求めるには，$\mathbf{a}_3=\mathbf{a}^3$ を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_\theta$ に垂直な単位ベクトルと考えれば，

$$\left.\begin{aligned}a_{11}a^{\alpha1}+a_{1\theta}a^{\alpha\theta}+0\cdot0&=\delta^\alpha_1\\ a_{\theta1}a^{\alpha1}+a_{\theta\theta}a^{\alpha\theta}+0\cdot0&=\delta^\alpha_\theta\\ 0\ +\ 0\ \ +1\cdot0&=0\end{aligned}\right\}$$

なる二元連立方程式が得られるから，これを解いて求めればよい．その結果は，次の通りである.

$$a^{11}=\frac{h^2}{h^2+(b+c\cos\theta)^2},\qquad a^{1\theta}=\frac{h^2}{bz}\frac{c\sin\theta}{h^2+(b+c\cos\theta)^2}$$

$$a^{\theta\theta}=\left(\frac{h^2}{b^2z^2}\right)\frac{h^2+b^2+c^2+2bc\cos\theta}{h^2+(b+c\cos\theta)^2}$$

曲率テンソル(第1.12.1節で後述するので結果のみを掲げる)：

$$\left.\begin{aligned}
b_{\theta\theta}&=-\frac{bz}{\{h^2+(b+c\cos\theta)^2\}^{1/2}}\\
b_\theta^1&=-\frac{h^2c\sin\theta}{\{h^2+(b+c\cos\theta)^2\}^{3/2}}\\
b_\theta^\theta&=-\left(\frac{h}{bz}\right)\frac{h^2+b^2+c^2+2bc\cos\theta}{\{h^2+(b+c\cos\theta)^2\}^{3/2}}\\
b^{11}&=-\left(\frac{b^4c^2}{bz}\right)\frac{\sin^2\theta}{\{h^2+(b+c\cos\theta)^2\}^{5/2}}\\
b^{1\theta}&=-\left(\frac{h^4c\sin\theta}{b^2z^2}\right)\frac{h^2+b^2+c^2+2bc\cos\theta}{\{h^2+(b+c\cos\theta)^2\}^{5/2}}\\
b^{\theta\theta}&=-\left(\frac{h^4}{b^3z^3}\right)\frac{(h^2+b^2+c^2+2bc\cos\theta)^2}{\{h^2+(b+c\cos\theta)^2\}^{5/2}}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Gamma_{1\theta1}=-\frac{bc}{h^2}\sin\theta,\qquad \Gamma_{1\theta\theta}=\frac{b^2z}{h^2},\qquad \Gamma_{\theta\theta1}=-\frac{bz}{h^2}(b+c\cos\theta),$$

$$\Gamma_{1\theta}^\theta=\frac{1}{z}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^1=-\frac{bz(b+c\cos\theta)}{h^2+(b+c\cos\theta)^2},\qquad \Gamma_{\theta\theta}^\theta=-\frac{(b+c\cos\theta)c\sin\theta}{h^2+(b+c\cos\theta)^2}$$

$$R_{\delta\alpha\beta\gamma}=0$$

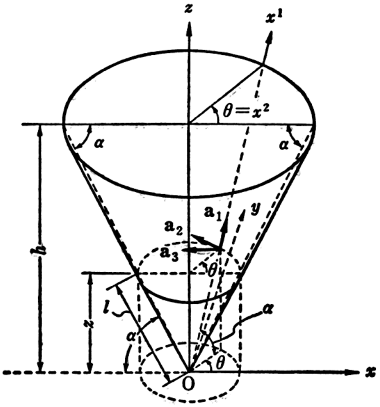
1.9.9　直円錐面座標系(曲面直交座標系)(第1.12.3節例題3参照)

座標 x^α は，斜円錐面座標系の場合と同様に定義する.

曲面基底ベクトル：

$$\mathbf{a}_1=(\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta)\cot\alpha+\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{a}_\theta=z(-\boldsymbol{i}\sin\theta+\boldsymbol{j}\cos\theta)\cot\alpha$$



第81図　直円錐面座標系

メートリック・テンソル：

$$a_{11}=\frac{1}{\sin^2\alpha},\qquad a_{\theta\theta}=z^2\cot^2\alpha$$

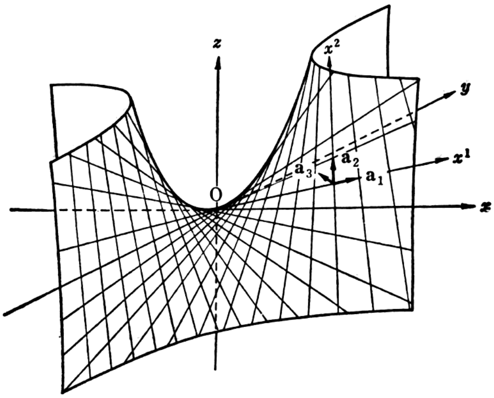
$$a^{11}=\sin^2\alpha,\qquad a^{\theta\theta}=\frac{1}{z^2}\tan^2\alpha$$

曲率テンソル：

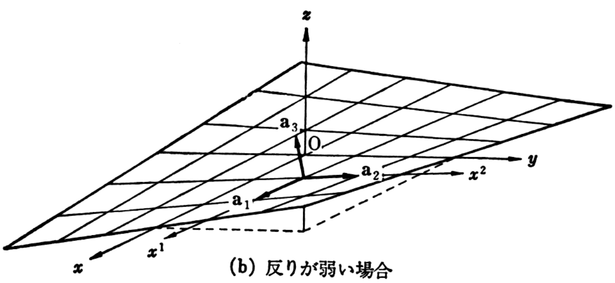
$$b_{\theta\theta}=-z\cos\alpha,\qquad b^{\theta}_{\theta}=-\frac{1}{z}\sin\alpha\tan\alpha,\qquad b^{\theta\theta}=-\frac{1}{z^3}\sin\alpha\tan^3\alpha$$

$$\Gamma_{1\theta\theta}=-\Gamma_{\theta\theta1}=z\cot^2\alpha,\qquad \Gamma^{\theta}_{1\theta}=z^{-1},\qquad \Gamma^{1}_{\theta\theta}=-z\cos^2\alpha$$

1.9.10 双曲放物面座標系(曲面斜交座標系)（第1.12.3節例題2参照）



(a) 反りが強い場合



(b) 反りが弱い場合

第82図　双曲放物面座標系

デカルト座標系において，双曲放物面は，

$$z=xy/c$$

で表される．この曲面上で $x^1=x, x^2=y$ とする．

$$\mathbf{a}_\alpha=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+\frac{xy}{c}\boldsymbol{k}\right)=\left(\boldsymbol{i}+\frac{y}{c}\boldsymbol{k}\right)\quad \text{or}\quad \left(\boldsymbol{j}+\frac{x}{c}\boldsymbol{k}\right)$$

∴メートリック・テンソル：

$$\therefore\quad a_{11}=1+\left(\frac{y}{c}\right)^2,\qquad a_{12}=\frac{xy}{c^2},\qquad a_{22}=1+\left(\frac{x}{c}\right)^2,\qquad a_{33}=1$$

$$a^{11}=\frac{c^2+x^2}{c^2+x^2+y^2},\qquad a^{12}=-\frac{xy}{c^2+x^2+y^2},\qquad a^{22}=\frac{c^2+y^2}{c^2+x^2+y^2}$$

$$a^{33}=1$$

曲率テンソル：

$$b_{12}=\frac{1}{(c^2+x^2+y^2)^{1/2}}$$

$$b_1^1=b_2^2=-\frac{xy}{(c^2+x^2+y^2)^{3/2}},\qquad b_2^1=\frac{c^2+x^2}{(c^2+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$b_1^2=\frac{c^2+y^2}{(c^2+x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$b^{11}=-\frac{2xy(c^2+x^2)}{(c^2+x^2+y^2)^{5/2}},\qquad b^{12}=\frac{c^4+c^2(x^2+y^2)+2x^2y^2}{(c^2+x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$b^{22}=-\frac{2xy(c^2+y^2)}{(c^2+x^2+y^2)^{5/2}}$$

$$\Gamma_{121}=\frac{y}{c^2},\qquad \Gamma_{122}=\frac{x}{c^2}$$

$$\Gamma_{12}^1=\frac{y}{c^2+x^2+y^2},\qquad \Gamma_{12}^2=\frac{x}{c^2+x^2+y^2}$$

$$R_{1212}=R_{2121}=-R_{1221}=-R_{2112}=-\frac{1}{c^2+x^2+y^2}$$

事 項 索 引

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

著 者 略 歴

昭和 15 年　東京帝国大学工学部土木工学科卒業
昭和 15 年　朝鮮総督府鉄道局
昭和 21 年　運輸省大阪地方施設部
昭和 30 年　日本国有鉄道・技術研究所
昭和 33 年　工学博士
昭和 37 年　東北大学教授
昭和 52 年　東北大学停年退官
昭和 52 年　芝浦工業大学教授・現在に至る

力学におけるテンソルと変分解析［上］　02261-1104

1980 年 2 月 29 日　初版　　定価 7500 円

検印廃止

発行者　学会出版センター
製作者　学会誌刊行センター

印刷所　新日本印刷株式会社
製本所　誠 製 本 株 式 会 社

株式会社　学会出版センター
113　東 京 都 文 京 区 本 郷 6 丁 目 2 番 10 号
電話 03-814-2001(代表)・振替 東京 6-71057

製版・大森製版所／カバー印刷・平版印刷